

## UN SCINDAGE DU MORPHISME DE FROBENIUS QUANTIQUE\*

MICHEL GROS ET MASAHARU KANEDA

RÉSUMÉ. Nous montrons que le morphisme de Frobenius quantique construit par Lusztig dans le cadre des algèbres enveloppantes quantiques  $U_{\mathcal{B}}$  spécialisées en une racine de l'unité admet un scindage multiplicatif (non unitaire). Nous trouvons également une base de la partie torique de la petite algèbre quantique constituée d'idempotents orthogonaux deux à deux et de somme 1 et faisons de même dans le cas "modulaire" pour l'algèbre des distributions d'un groupe algébrique semi-simple.

We show that the quantum Frobenius morphism constructed by Lusztig in the setting of the quantum enveloping algebra  $U_{\mathcal{B}}$  specialized at a root of unity admits a multiplicative splitting (non unital). We also find a basis of the toral part of the small quantum algebra consisting of pairwise orthogonal idempotents summing up to 1, and likewise in the modular case of the algebra of distributions for a semisimple algebraic group.

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Le cas de $\mathfrak{sl}_2$	3
3. Premières réductions	4
4. Identités polynomiales	7
5. Sur quelques idempotents. Retour sur la théorie modulaire	8
6. Le cas général	22
7. Contraction	24
Références	27

## 1. INTRODUCTION

1.1. Soient  $A$  une matrice de Cartan  $\ell \times \ell$  de type fini,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$  l'anneau des polynômes de Laurent en l'indéterminée  $v$ , et  $U$  la  $\mathcal{A}$ -forme (i.e. avec "puissances divisées") de l'algèbre quantique associée à  $A$ . Soit  $l > 1$  un entier premier avec tous les coefficients de  $A$ . Soient  $\mathcal{B}$  le quotient de  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][v]$  par l'idéal engendré par le  $l$ -ième polynôme cyclotomique  $\Phi_l$ ,  $q$  l'image de  $v$  dans  $\mathcal{B}$ , et  $U_{\mathcal{B}} = U \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ . Soient enfin  $\mathbf{U}$  la  $\mathbb{Z}$ -forme de Kostant de l'algèbre enveloppante universelle associée à  $A$ , et  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}} = \mathbf{U} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{B}$ . Lusztig a établi dans [11, 8.10] l'existence d'un morphisme de Frobenius quantique  $\text{Fr} : U_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbf{U}_{\mathcal{B}}$ , qui, lorsque  $l$  est premier et noté alors  $p$ , est un relèvement du morphisme de Frobenius usuel sur l'algèbre des distributions correspondante sur le corps premier  $\mathbb{F}_p$  à  $p$  éléments. Nous construisons dans cet article un scindage du morphisme  $\text{Fr}$  relevant, en un sens qu'on précisera (5.6), le scindage du Frobenius usuel construit dans [5, Thm. 1.3].

---

\* supported in part by JSPS Grants in Aid for Scientific Research 23540023.

1.2. Dans une situation similaire mais avec néanmoins des hypothèses différentes sur  $l$  (cf. [9], 2.), adaptant donc en conséquence les notations précédentes, rappelons que Littelmann a défini à l'aide de [9, Thm 1] la *contraction* d'un  $U_{\mathcal{B}}$ -module de Weyl dans le but de compléter son programme visant à établir une théorie de “monômes standards” pour les  $U_{\mathcal{B}}$ -modules de Weyl duaux. Il utilise simplement pour ce faire un certain scindage de Fr sur la seule partie nilpotente de  $U_{\mathcal{B}}$ . Le prolongement naïf de son scindage à tout  $U_{\mathcal{B}}$  s'avère ne pas être multiplicatif. Néanmoins, revenant à nos hypothèses 1.1, reprenant sa construction et faisant intervenir en plus une mesure involutive invariante de la sous-algèbre de Cartan de la sous-algèbre infinitésimale de  $U_{\mathcal{B}}$ , un miracle analogue à celui du cas modulaire [5] nous permet de construire un prolongement *multiplicatif*. On est alors en mesure de contracter n'importe quel  $U_{\mathcal{B}}$ -module pour en faire un  $U_{\mathcal{B}}$ -module. Si bien sûr on ne s'intéresse qu'aux  $U_{\mathcal{B}}$ -modules ayant une décomposition suivant leurs poids, on dispose [15, Prop. 3.4] déjà d'une façon de les contracter : il suffit d'interpréter ces modules comme des modules unitaires (“unital modules”) sur l'algèbre quantique modifiée pour laquelle un scindage du Frobenius est défini dans *loc. cit.* (et ce, sans même la restriction sur  $l$  ci-dessus).

1.3. Pour énoncer plus précisément notre résultat principal, notons  $\mathbb{Q}(v)$  (resp.  $\mathbb{Q}(q)$ ) le corps de fractions de  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) et  $U_{\mathbb{Q}(v)}$  l'algèbre quantique associée à  $A = \llbracket a_{ij} \rrbracket$  sur  $\mathbb{Q}(v)$  avec ses générateurs standards  $E_i, K_i, F_i$ ,  $i \in [1, \ell]$ . Soient  $d_i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \in [1, \ell]$ , tels que la matrice  $\llbracket d_i a_{ij} \rrbracket$  soit symétrique, et  $v_i = v^{d_i}$ . Pour tous  $i \in [1, \ell]$  et  $n \in \mathbb{N}$  posons  $[n]_i! = \frac{v_i^n - v_i^{-n}}{v_i - v_i^{-1}}$ , et  $E_i^{(n)} = \frac{E_i^n}{[n]_i!}$ ,  $F_i^{(n)} = \frac{F_i^n}{[n]_i!}$ . Alors,  $U$  est simplement la  $\mathcal{A}$ -sous-algèbre de  $U_{\mathbb{Q}(v)}$  engendrée par les  $E_i^{(n)}, F_i^{(n)}, K_i, K_i^{-1}$ ,  $i \in [1, \ell]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Soient également  $X_i, Y_i$ ,  $i \in [1, \ell]$ , les générateurs standards de l'algèbre enveloppante universelle  $U_{\mathbb{Q}(q)}$  associée à  $A$  sur  $\mathbb{Q}(q)$ . Si  $X_i^{(n)} = \frac{X_i^n}{n!}$  et  $Y_i^{(n)} = \frac{Y_i^n}{n!}$ ,  $i \in [1, \ell]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{\mathcal{B}}$  est la  $\mathcal{B}$ -sous-algèbre de  $U_{\mathbb{Q}(q)}$  engendrée par les  $X_i^{(n)}$  et  $Y_i^{(n)}$ , pour  $i \in [1, \ell]$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Le morphisme de Frobenius introduit par Lusztig (strictement dit, Lusztig travaille dans [11] au-dessus de  $\mathbb{Z}[v]$  modulo l'idéal engendré par  $\Phi_l$ )

$$(1.3.1) \quad \text{Fr} : U_{\mathcal{B}} \rightarrow U_{\mathcal{B}}$$

est alors défini, pour tous  $i \in [1, \ell]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , par

$$(1.3.2) \quad E_i^{(n)} \mapsto \begin{cases} X_i^{(\frac{n}{l})} & \text{si } l|n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad F_i^{(n)} \mapsto \begin{cases} Y_i^{(\frac{n}{l})} & \text{si } l|n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad K_i^{\pm 1} \mapsto 1.$$

1.4. Si  $U_{\mathcal{B}}^{\pm}$  désigne la  $\mathcal{B}$ -sous-algèbre de  $U_{\mathcal{B}}$  engendrée par les  $X_i^{(n)}$  (resp.  $Y_i^{(n)}$ ), pour  $i \in [1, \ell]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , Lusztig définit [11, 8.6] un scindage  $\text{Fr}^{\pm}$  de  $\text{Fr}|_{U_{\mathcal{B}}^{\pm}}$  par  $X_i^{(n)} \mapsto E_i^{(nl)}$  (resp.  $Y_i^{(n)} \mapsto F_i^{(nl)}$ ) pour tous  $i \in [1, \ell]$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $U_{\mathcal{B}}^{\geq 0}$  (resp.  $U_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$ ) désigne la  $\mathcal{B}$ -sous-algèbre de  $U_{\mathbb{Q}(q)}$  engendrée par  $U_{\mathcal{B}}^{\pm}$  et par les  $\binom{H_i}{n} = \frac{H_i(H_i-1)\dots(H_i-n+1)}{n!}$ ,  $i \in [1, \ell]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , Kumar et Littelmann [8, Thm. 1.2] prolongent ensuite  $\text{Fr}^{\pm}$  à  $U_{\mathcal{B}}^{\geq 0}$  et  $U_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$ , mais au prix du passage au quotient (lequel est indispensable pour conserver la multiplicativité) par l'idéal  $(K_i^l - 1 \mid i \in [1, \ell])$ . Si l'on introduit maintenant  $\kappa_{i0} = \frac{1}{2l} \sum_{j=0}^{2l-1} K_i^j \in U_{\mathbb{Q}(v)}$ ,  $i \in [1, \ell]$  et qu'on pose  $\kappa = \kappa_{10} \dots \kappa_{\ell 0}$ , il s'avère que  $\kappa$  appartient en fait à  $U_{\mathcal{B}}$  et est l'unique idempotent non trivial de la  $\mathcal{B}$ -sous-algèbre  $\mathfrak{u}_{\mathcal{B}}^0$  de  $U_{\mathcal{B}}$  engendrée par les  $K_i$ ,  $i \in [1, \ell]$ , à être invariant sous l'action naturelle à gauche, autrement dit :  $\kappa \in \{x \in \mathfrak{u}_{\mathcal{B}}^0 \mid yx = \varepsilon(y)x \text{ pour tout } y \in \mathfrak{u}_{\mathcal{B}}^0\}$  (avec  $\varepsilon$  la co-unité de  $\mathfrak{u}_{\mathcal{B}}^0$ ). Cet élément  $\kappa$  apparaît donc comme la variante quantique de la mesure invariante  $\mu_0$ , introduite dans [5, 1.3], sur le noyau de Frobenius d'un tore maximal du groupe algébrique semi-simple  $G$  sur  $\mathbb{F}_p$  correspondant. On peut alors énoncer le

**Théorème 1.5.** (i) *Il existe une unique application  $\mathcal{B}$ -linéaire multiplicative*

$$(1.5.1) \quad \phi : \mathbf{U}_{\mathcal{B}} \rightarrow U_{\mathcal{B}}$$

*telle que  $X_i^{(n)} \mapsto E_i^{(nl)}\kappa$ ,  $Y_i^{(n)} \mapsto F_i^{(nl)}\kappa$  pour tous  $i \in [1, \ell]$  et  $n \in \mathbb{N}$ .*

(ii) *L'élément  $\kappa$  est l'unité de  $\text{im}\phi$  et  $\text{Fr} \circ \phi = \text{id}_{\mathbf{U}_{\mathcal{B}}}$ .*

La démonstration dont nous disposons, tout à fait élémentaire sur le fond, est simplement calculatoire et n'éclaire certainement pas assez le rôle théorique central que doit jouer la "norme"  $\kappa$ . Elle nous a semblé néanmoins méritée d'être donnée, le résultat suggérant par exemple une alternative à l'emploi des algèbres quantiques modifiées pour certaines applications. L'article est structuré en trois grandes parties. Nous traitons tout d'abord en détail (sections 2 à 4) le cas de l'algèbre  $\mathfrak{sl}_2$ . La seconde partie (section 5) est d'un intérêt assez largement indépendant. Les idempotents qui sont naturellement apparus lors la démonstration de 1.5 invitent à revenir sur leurs analogues modulaires et leurs généralisations. Nous montrons comment ils permettent de décrire précisément (cf. Prop. 5.22, Prop. 5.29) plusieurs des algèbres apparaissant dans ce travail et aussi, comment dans le cas modulaire on peut obtenir une nouvelle preuve de l'existence (cf. Thm 5.33) d'un scindage du morphisme de Frobenius obtenu précédemment dans [4]. Enfin, dans la dernière partie (sections 6 et 7), nous expliquons les aménagements, essentiellement typographiques, à apporter pour traiter le cas général du théorème 1.5 et terminons par quelques corollaires laissant d'autres applications pour un travail ultérieur.

Le premier auteur (M.G.) remercie très sincèrement le second (M.K.) pour son généreux accueil lors de son séjour en mai 2012 à l'Université de la Ville d'Osaka (OCU) ayant rendu possible ce travail ainsi que le département de mathématiques pour l'atmosphère stimulante dans laquelle il a été effectué. Les auteurs remercient tous deux H.H. Andersen d'avoir attiré leur attention sur [16].

## 2. LE CAS DE $\mathfrak{sl}_2$

2.1. Soit donc  $l$  un nombre impair. Rappelons qu'on a (avec un allègement de notations évident) dans  $U_{\mathcal{B}}$  les relations

$$(2.1.1) \quad KE = q^2 EK ; KF = q^{-2} FK ; [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

et qu'on note, pour  $c \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$

$$(2.1.2) \quad \left[ \begin{array}{c} K; c \\ m \end{array} \right] = \prod_{h=1}^m \frac{Kv^{c-h+1} - K^{-1}v^{-(c-h+1)}}{v^h - v^{-h}} \in U_{\mathbb{Q}(v)}.$$

Cet élément appartient en fait à  $U$  et nous noterons par le même symbole son image dans  $U_{\mathcal{B}}$ . Nous poserons aussi simplement

$$(2.1.3) \quad \left[ \begin{array}{c} K \\ m \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} K; 0 \\ m \end{array} \right].$$

**Proposition 2.2.** (i) *On a  $\kappa_j = \frac{1}{2l} \sum_{i=0}^{2l-1} q^{-2ji} K^i \in U_{\mathcal{B}}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ .*

(ii) *Plus précisément, on a*

$$(2.2.1) \quad \kappa_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \left[ \begin{array}{c} K \\ i \end{array} \right] (q^i + q^{-i} K) \in U_{\mathcal{B}}.$$

(iii) *Posons, pour alléger,  $\kappa = \kappa_0$ . L'application  $\mathcal{B}$ -linéaire*

$$(2.2.2) \quad \phi : \mathbf{U}_{\mathcal{B}} \rightarrow U_{\mathcal{B}}$$

*définie pour tout  $i \geq 0$  par*

$$(2.2.3) \quad \phi(X^{[i]}) = E^{(li)} \cdot \kappa ; \phi(Y^{[i]}) = F^{(li)} \cdot \kappa ; \phi(1) = \kappa ; \phi\left(\begin{pmatrix} H \\ i \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} K \\ li \end{bmatrix} \cdot \kappa$$

*est un morphisme (non-unitaire) d'algèbres qui scinde l'application de Frobenius  $\text{Fr}$  (1.3.2).*

### 3. PREMIÈRES RÉDUCTIONS

#### 3.1. Posons

$$(3.1.1) \quad U_q = U_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{Q}(q) ; \mathbf{u}_q^0 = \mathbb{Q}(q)[K].$$

Supposons pour l'instant démontré (2.2) (i).

**Lemme 3.2.** (i) *On a  $\kappa^2 = \kappa$ .*

(ii) *On a  $\kappa.K^j = \kappa$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ; en particulier,  $(1 - K^l) \cdot \kappa = \kappa \cdot (1 - K^l) = 0$ . On a*

$$(\mathbf{u}_q^0)^{\mathbf{u}_q^0} := \{x \in \mathbf{u}_q^0 \mid Kx = x\} = \mathbb{Q}[q]\kappa.$$

(iii) *On a  $\kappa.E^{(li)} = E^{(li)} \cdot \kappa ; \kappa.F^{(li)} = F^{(li)} \cdot \kappa$  pour tout  $i \geq 0$ .*

Pour (i) et (ii), on utilise simplement que  $K^{2l} = 1$  dans  $U_{\mathcal{B}}$ . Pour (iii), c'est une conséquence de la commutation de  $K$  avec les  $E^{(li)}$  et  $F^{(li)}$  (conséquence immédiate des relations (2.1.1)) pour  $i \geq 0$ . D'où l'assertion.

Dans la définition de  $\phi$  (2.2.3), on pourrait donc tout aussi bien multiplier par  $\kappa$  à gauche.

3.3. Soit, comme dans l'introduction,  $U_{\mathcal{B}}^{\geq 0}$  (resp.  $U_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$ ) la  $\mathcal{B}$ -sous-algèbre de  $U_{\mathcal{B}}$  engendrée par les  $\{E^{(i)}, i \in \mathbb{N}\}$  et les  $\{K^{\pm 1}, \begin{bmatrix} K; c \\ m \end{bmatrix}, c \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$  (resp. les  $F^{(i)}$  et les  $\{K^{\pm 1}, \begin{bmatrix} K; c \\ m \end{bmatrix}, c \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ ) et  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geq 0}$  (resp.  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$ ) la  $\mathcal{B}$ -sous-algèbre de  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$  engendrée par les  $\{X^{[i]}, i \in \mathbb{N}\}$  et les  $\{\begin{pmatrix} H \\ m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{N}\}$  (resp. les  $\{Y^{[i]}, i \in \mathbb{N}\}$  et les  $\{\begin{pmatrix} H \\ m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{N}\}$ ). Avec ces notations, il résulte alors de [8, Thm. 1.2] que l'application (rappelons ici que  $K^l$  est central dans  $U_{\mathcal{B}}$ )

$$(3.3.1) \quad \text{Fr}' : \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geq 0} \rightarrow U_{\mathcal{B}}^{\geq 0} / \{(K^l - 1)(U_{\mathcal{B}}^{\geq 0} \otimes_{\mathcal{B}} \mathbb{C}) \cap U_{\mathcal{B}}^{\geq 0}\}$$

définie par

$$(3.3.2) \quad \text{Fr}'(X^{[i]}) = E^{(li)} , \text{Fr}'\left(\begin{pmatrix} H \\ i \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} K; 0 \\ li \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ li \end{bmatrix}$$

et son analogue évident  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leq 0} \rightarrow U_{\mathcal{B}}^{\leq 0} / \{(K^l - 1)(U_{\mathcal{B}}^{\leq 0} \otimes_{\mathcal{B}} \mathbb{C}) \cap U_{\mathcal{B}}^{\leq 0}\}$  sont des morphismes d'algèbres.

Comme la restriction de  $\phi$  à  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geq 0}$  et  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$  se factorise par  $\text{Fr}'$ , on voit donc, compte tenu de (3.2) (ii), que cette restriction est un morphisme d'algèbres. On utilise maintenant la relation

$$(3.3.3) \quad X^{[b]}Y^{[a]} - Y^{[a]}X^{[b]} = \sum_{r=1}^{\min(a,b)} Y^{[a-r]} \begin{pmatrix} H - a - b + 2r \\ r \end{pmatrix} X^{[b-r]},$$

pour tous  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}$ . Il suffit donc pour prouver (2.2)(iii), de montrer qu'on a l'égalité suivante dans  $U_{\mathcal{B}}$

$$(3.3.4) \quad \phi(X^{[b]})\phi(Y^{[a]}) - \phi(Y^{[a]})\phi(X^{[b]}) = \sum_{r=1}^{\min(a,b)} \phi(Y^{[a-r]})\phi\left(\begin{pmatrix} H - a - b + 2r \\ r \end{pmatrix}\right)\phi(X^{[b-r]}).$$

D'après ([11], 6.5. (a2)), on a

$$(3.3.5) \quad E^{(lb)} F^{(la)} - F^{(la)} E^{(lb)} = \sum_{s=1}^{\min(la, lb)} F^{(la-s)} \left[ \begin{matrix} K; -la - lb + 2s \\ s \end{matrix} \right] E^{(lb-s)}.$$

Utilisant la relation  $KF = q^{-2}FK$  (2.1.1), on voit immédiatement que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$(3.3.6) \quad \kappa.F^{(j)} = F^{(j)}.\kappa_j$$

de sorte que la vérification de (3.3.4) revient à établir que pour tout  $s$  tel que  $\min(a, b) \geq s \geq 1$  et ne divisant pas  $l$ , on a

$$(3.3.7) \quad \kappa_{la+lb-s} \left[ \begin{matrix} K; -la - lb + 2s \\ s \end{matrix} \right] = \kappa_{-s} \left[ \begin{matrix} K; 2s - la - lb \\ s \end{matrix} \right] = 0.$$

3.4. Soit  $U_{\mathcal{B}}^0$  la sous- $\mathcal{B}$ -algèbre de  $U_{\mathcal{B}}$  engendrée par les  $\{K^{\pm 1}, \left[ \begin{matrix} K; c \\ m \end{matrix} \right], c \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ .

**Lemme 3.5.** *Soit  $c \in \mathbb{Z}$  fixé. Les  $K^{\delta} \left[ \begin{matrix} K; c \\ n \end{matrix} \right]$  avec  $\delta = 0$  ou  $1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  forment une base du  $\mathcal{B}$ -module  $U_{\mathcal{B}}^0$ .*

En utilisant [11, 6.4. (b4)], on se ramène en effet au cas standard  $c = 0$  où l'énoncé est connu (*loc. cit.* Thm 6.7, (c)). On rangera parfois les vecteurs de cette base suivant l'ordre

$$(3.5.1) \quad 1, K, \left[ \begin{matrix} K; c \\ 1 \end{matrix} \right], K \left[ \begin{matrix} K; c \\ 1 \end{matrix} \right], \left[ \begin{matrix} K; c \\ 2 \end{matrix} \right], K \left[ \begin{matrix} K; c \\ 2 \end{matrix} \right], \dots$$

3.6. Soit toujours  $c \in \mathbb{Z}$  fixé. Ecrivons, pour  $m, t \in \mathbb{N}$ , l'élément  $K^m \left[ \begin{matrix} K; c \\ t \end{matrix} \right] \in U_{\mathcal{B}}^0$  dans la base de (3.5) :

$$(3.6.1) \quad K^m \left[ \begin{matrix} K; c \\ t \end{matrix} \right] = \sum_{(\delta, n)} \alpha_{\delta, n}(m, t) K^{\delta} \left[ \begin{matrix} K; c \\ n \end{matrix} \right]$$

avec  $\alpha_{\delta, n}(m, t) \in \mathcal{B}$ .

**Lemme 3.7.** *On a, pour tout  $m \geq 0$ , la relation*

$$(3.7.1) \quad K^{m+2} \left[ \begin{matrix} K; c \\ t \end{matrix} \right] = a_c(t) K^{m+1} \left[ \begin{matrix} K; c \\ t+1 \end{matrix} \right] + b_c(t) K^m \left[ \begin{matrix} K; c \\ t \end{matrix} \right]$$

avec

$$(3.7.2) \quad a_c(t) = q^{t-c}(q^{t+1} - q^{-t-1}) ; \quad b_c(t) = q^{2(t-c)}.$$

Cela résulte immédiatement du cas  $m = 0$  et de l'égalité  $K^2 = v^{t-c}K.[Kv^{c-t} - K^{-1}v^{-c+t}] + v^{2(t-c)}$ .

3.8. Soient maintenant  $d \geq 1$ ,  $n \geq 1$  et  $x_1, \dots, x_n$  des variables (que l'on spécialisera en des racines  $l$ -ièmes de l'unité). On pose

$$(3.8.1) \quad S_{d,n} = S_{d,n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_d \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_d} ,$$

somme qui comporte  $\binom{n+d-1}{d}$  termes. On prolonge cette définition en posant  $S_{0,n} = 1$ .

3.9. Les relations de récurrence pour les coordonnées  $\alpha_{\delta,s}(m,t)$  (3.6.1) fournies par les égalités (3.7.1) se résolvent sans difficultés. Il est commode de distinguer le cas  $m = 2n \geq 2$  (le cas  $m = 0$  est trivial) où pour tout  $i$  tel que  $0 \leq i \leq n-1$ , on a

(3.9.1)

$$\begin{aligned}\alpha_{1,t+m-1-2i}(m,t) &= a_c(t+m-2-2i) \prod_{j=0}^{m-3-2i} a_c(t+j) \cdot S_{i,m-2i}(b_c(t), \dots, b_c(t+m-1-2i)) \\ \alpha_{0,t+m-2-2i}(m,t) &= b_c(t+m-2-2i) \prod_{j=0}^{m-3-2i} a_c(t+j) \cdot S_{i,m-2i-1}(b_c(t), \dots, b_c(t+m-2-2i))\end{aligned}$$

et le cas  $m = 2n+1 \geq 3$  (le cas  $m = 1$  est trivial) où pour tout  $i$  tel que  $0 \leq i \leq n-1$ , on a

(3.9.2)

$$\begin{aligned}\alpha_{1,t+m-1-2i}(m,t) &= a_c(t+m-2-2i) \prod_{j=0}^{m-3-2i} a_c(t+j) \cdot S_{i,m-2i}(b_c(t), \dots, b_c(t+m-1-2i)) \\ \alpha_{0,t+m-2-2i}(m,t) &= b_c(t+m-2-2i) \prod_{j=0}^{m-3-2i} a_c(t+j) \cdot S_{i,m-2i-1}(b_c(t), \dots, b_c(t+m-2-2i)) \\ \alpha_{1,t}(m,t) &= S_{n,1}(b_c(t)).\end{aligned}$$

Les autres coordonnées sont nulles. Pour  $i = n-1$ , on a utilisé et on utilisera plus bas la convention usuelle selon laquelle un produit indexé par l'ensemble vide vaut 1, comme par exemple ci-dessus

$$\prod_{k=0}^{-1}.$$

3.10. A l'aide de ces expressions (3.9.1) et (3.9.2), on obtient celles des coordonnées  $(\alpha_{\delta,n})$  de  $\kappa_{-s} \cdot \left[ \begin{smallmatrix} K; 2s - la - lb \\ s \end{smallmatrix} \right]$  dans la base (3.5) : la première coordonnée possiblement non nulle apparaissant dans le calcul est  $\alpha_{0,s}$  et la dernière  $\alpha_{1,s+2l-2}$ . Les énoncés de la proposition (2.2) vont résulter de l'étude (nullité pour  $s \geq 1$  non divisible par  $l$  et calcul explicite pour  $s$  divisible par  $l$ ) de ces coordonnées. On a :

- pour  $\alpha_{0,s}$

$$(3.10.1) \quad 1 + q^{4s} S_{1,1}^{(s)} + q^{8s} S_{2,1}^{(s)} + \dots + q^{4(l-1)s} S_{l-1,1}^{(s)}$$

- pour  $\alpha_{1,s+i-1}$  avec  $2l-1 \geq i = 2j+1 \geq 1$

$$(3.10.2) \quad q^{2si} \prod_{k=0}^{i-2} a_{2s}(s+k) \cdot (1 + q^{4s} S_{1,i}^{(s)} + \dots + q^{4(l-1-j)s} S_{l-1-j,i}^{(s)})$$

- pour  $\alpha_{0,s+i}$  avec  $2l-3 \geq i = 2j+1 \geq 1$

$$(3.10.3) \quad q^{2s(i+2)} b_{2s}(s+i) \prod_{k=0}^{i-1} a_{2s}(s+k) \cdot (1 + q^{4s} S_{1,i+1}^{(s)} + \dots + q^{4(l-2-j)s} S_{l-2-j,i+1}^{(s)})$$

- pour  $\alpha_{1,s+i-1}$  avec  $2l-2 \geq i = 2j \geq 2$

$$(3.10.4) \quad q^{2si} \prod_{k=0}^{i-2} a_{2s}(s+k) \cdot (1 + q^{4s} S_{1,i}^{(s)} + \dots + q^{4(l-1-j)s} S_{l-1-j,i}^{(s)})$$

- pour  $\alpha_{0,s+i}$  avec  $2l - 4 \geq i = 2j \geq 2$

$$(3.10.5) \quad q^{2s(i+2)} b_{2s}(s+i) \prod_{k=0}^{i-1} a_{2s}(s+k) \cdot (1 + q^{4s} S_{1,i+1}^{(s)} + \dots + q^{4(l-2-j)s} S_{l-2-j,i+1}^{(s)})$$

expressions dans lesquelles  $S_{d,n}^{(s)}$  signifie qu'on a évalué  $S_{d,n}$  en  $(b_{2s}(s), b_{2s}(s+1), \dots, b_{2s}(s+n-1))$  avec  $b_{2s}(t) = q^{2(t-2s)}$ .

3.11. On notera que certaines de ces expressions sont “trivialement” nulles : pour  $i > l$  (resp.  $i > l-1$ ), on a  $s+i-2 \geq l-1$  (resp.  $s+i-1 \geq l-1$ ) pour tout  $s \geq 1$  si bien que  $a_{2s}(l-1) = 0$  apparait dans les produits ci-dessus. Pour vérifier la nullité d'une des combinaisons linéaires des  $S_{d,n}^{(s)}$  apparaissant ci-dessus, on peut donc supposer  $n \leq l$ ; de plus, l'évaluation des  $S_{d,n}$  se fait toujours sur des racines de l'unité distinctes deux à deux.

#### 4. IDENTITÉS POLYNOMIALES

4.1. Pour  $n = 1$ , on a évidemment  $S_{d,n} = S_{d,1} = x_1^d$  (3.8.1) et

**Lemme 4.2.** *Pour tout  $n \geq 2$  et tout  $d \geq 1$ , on a*

$$(4.2.1) \quad S_{d,n} = \sum \frac{(-1)^{\alpha(i_2, \dots, i_n) + n}}{(x_2 - x_{i_2}) \cdot (x_3 - x_{i_3}) (x_4 - x_{i_4}) \dots (x_n - x_{i_n})} \cdot (x_n^{d+n-1} - x_{i_n}^{d+n-1}) ;$$

la somme portant sur les  $(i_2, \dots, i_n)$  tels que  $i_2 = 1; i_3 \in \{2, i_2\}; i_4 \in \{3, i_3\}; \dots; i_n \in \{n-1, i_{n-1}\}$  (avec la convention  $i_1 = 1$ ) et  $\alpha(i_2, \dots, i_n)$  le cardinal de l'ensemble des  $j$  tels que  $i_{j+1} \neq i_j$  avec  $n-1 \geq j \geq 2$ .

La somme apparaissant dans (4.2.1) comporte  $2^{n-2}$  termes et on démontre (4.2) par récurrence en utilisant la relation

$$(4.2.2) \quad S_{d,n} = \sum_{i=0}^d x_n^i S_{d-i, n-1}.$$

L'expression (4.2.1) est une forme ramassée de l'écriture, plus maniable en fait pour les calculs, des quotients successifs apparaissant dans les étapes de la récurrence :

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} S_{d,2} &= \frac{x_2^{d+1} - x_1^{d+1}}{x_2 - x_1}; S_{d,3} = \frac{\frac{x_3^{d+2} - x_2^{d+2}}{x_3 - x_2} - \frac{x_3^{d+2} - x_1^{d+2}}{x_3 - x_1}}{x_2 - x_1}; \\ S_{d,4} &= \frac{\frac{\frac{x_4^{d+3} - x_3^{d+3}}{x_4 - x_3} - \frac{x_4^{d+3} - x_2^{d+3}}{x_4 - x_2}}{x_3 - x_2} - \frac{\frac{x_4^{d+3} - x_3^{d+3}}{x_4 - x_3} - \frac{x_4^{d+3} - x_1^{d+3}}{x_4 - x_1}}{x_3 - x_1}}{x_2 - x_1}; \dots \end{aligned}$$

4.3. Toujours en utilisant l'expression (4.2.1) (ou plus commodément l'écriture (4.2.3) avec des quotients successifs) et la relation

$$(4.3.1) \quad S_{d,n+1} = x_{n+1} S_{d-1, n+1} + S_{d,n}$$

on obtient par récurrence le

**Lemme 4.4.** (i) *Pour  $l-1 \geq d \geq 1$  et  $l \geq n \geq 2$  tels que  $d+n \geq l+1$ , on a*

$$(4.4.1) \quad S_{d,n}(q_1, \dots, q_n) = 0$$

dès que les racines  $l$ -ièmes de l'unité  $(q_j)$  sont distinctes deux à deux.

(ii) Pour toutes racines  $l$ -ièmes de l'unité  $(q_j)$  distinctes deux à deux et différentes de 1,

$$(4.4.2) \quad \sum_{d=0}^{l-1} S_{d,n}(q_1, \dots, q_n) = 0.$$

Pour vérifier (ii), on utilise que, grâce à (4.3.1), on peut écrire

$$(4.4.3) \quad \sum_{d=0}^{l-1} S_{d,n+1} = \sum_{d=0}^{l-1} S_{d,n} + x_{n+1} \left( \sum_{d=0}^{l-1} S_{d,n+1} - S_{l-1,n+1} \right)$$

puis on utilise que (4.4.1)  $S_{l-1,n+1}(q_1, \dots, q_n) = 0$  et l'on fait  $x_{n+1} = 1$  pour obtenir (4.4.2).

**Lemme 4.5.** On a, pour tout  $l-1 \geq n \geq 2$ ,

$$(4.5.1) \quad \left( \sum_{i=0}^{l-1} S_{i,n} \right) (1, q^2, \dots, q^{2(n-1)}) = \frac{l}{(1-q^2) \cdot (1-q^4) \cdot \dots \cdot (1-q^{2(n-1)})}.$$

Pour  $n = 1$ , la somme (4.5.1) ci-dessus fait évidemment  $l$ .

A l'aide de (3.10.1)-(3.10.5) spécialisé au cas  $s = 0$ , on déduit de (4.5) et de la relation évidente

$$(4.5.2) \quad (1-q^2) \cdot (1-q^4) \cdot \dots \cdot (1-q^{2(n-1)}) = (-1)^{n-1} q^{n-1} \prod_{i=0}^{n-2} a_0(i)$$

que les coordonnées de  $\kappa_0$  (2.2) dans la base (3.5) sont bien celles données dans (2.2) (ii). Le cas  $j \neq 0$  peut se traiter par une analyse analogue, prouvant ainsi (2.2) (i) mais nous donnerons en (5.5.1) un résultat plus précis.

4.6. Utilisant (4.4) (i), on voit donc qu'on peut compléter par des quantités nulles les sommes tronquées avant  $d = l-1$  dans les équations (3.10.1)-(3.10.5) de sorte à pouvoir exploiter (4.4) (ii). On obtient ainsi les nullités des quantités (3.10.1)-(3.10.5) pour  $l-1 \geq s \geq 1$  traduisant (3.3.7).

## 5. SUR QUELQUES IDEMPOTENTS. RETOUR SUR LA THÉORIE MODULAIRE

5.1. Soit  $p$  un nombre premier impair. La théorie que nous qualifions ici en abrégé de *modulaire* réfère toujours au cas où  $l = p$  et où, éventuellement, l'on "réduit" modulo  $p$  la théorie quantique en un sens qu'on va préciser tout de suite (5.5) (iv). Soient alors  $G$  le  $\mathbb{F}_p$ -groupe algébrique  $SL_2$  des matrices carrés d'ordre 2 et de déterminant 1 et  $T$  le tore maximal formé des matrices diagonales. Pour  $r \in \mathbb{N}^+$ , soient  $G_r$  (resp.  $T_r$ ) le  $r$ -ième noyau de Frobenius de  $G$  (resp.  $T$ ) et  $\text{Dist}(G)$  (resp.  $\text{Dist}(G_r)$ ,  $\text{Dist}(T)$ ,  $\text{Dist}(T_r)$ ) l'algèbre des distributions de  $G$  (resp.  $G_r$ ,  $T$ ,  $T_r$ ). On a, dans  $\text{Dist}(G)$ , les relations suivantes pour tous  $a, a', b, c, c' \in \mathbb{N}$ ,

$$(5.1.1) \quad X^{(a)} X^{(a')} = \binom{a+a'}{a} X^{(a+a')}, \quad Y^{(c)} Y^{(c')} = \binom{c+c'}{c} Y^{(c+c')},$$

$$(5.1.2) \quad X^{(a)} \begin{pmatrix} H \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H-2a \\ b \end{pmatrix} X^{(a)}, \quad Y^{(c)} \begin{pmatrix} H \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H+2c \\ b \end{pmatrix} Y^{(c)} \quad [6, \text{Lem. 26.3.D}],$$

$$(5.1.3) \quad X^{(a)} Y^{(c)} = \sum_{i=0}^{\min\{a,c\}} Y^{(c-i)} \binom{H+2i-a-c}{i} X^{(a-i)} \quad [6, \text{Lem. 26.2}].$$



5.2. Conservons les notations de 5.1. On dispose sur  $\text{Dist}(T)$  de l'endomorphisme (dit de Frobenius) noté  $\text{Dist}(\text{Fr})$  (ou parfois simplement  $\text{Fr}$ ) de  $\mathbb{F}_p$ -algèbres tel que pour tout  $m \in \mathbb{N}$

$$(5.2.1) \quad \binom{H}{m} \mapsto \begin{cases} \binom{\frac{H}{p}}{\frac{m}{p}} & \text{si } p|m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et de son scindage évident  $\text{Fr}'$  défini par

$$(5.2.2) \quad \text{Fr}'\left(\binom{H}{m}\right) = \binom{H}{pm}$$

pour tout  $n \geq m$  qui est un endomorphisme de  $\mathbb{F}_p$ -algèbres comme on le vérifie aisément. Il résulte des propriétés de l'application  $\text{Fr}'^{\pm}$  mentionnée en 1.4 que cette notation est cohérente avec (3.3.2).

5.3. Nous aurons besoin plus bas (5.5 (iv)), pour  $n \in \mathbb{Z}$ , de

$$(5.3.1) \quad \mu_n = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{H-n}{i} \in \text{Dist}(T_1).$$

Ces éléments sont ceux qui étaient notés  $\Delta_{T,n}$  dans [4, 3.1]. Mentionnons à cette occasion que [4, Prop. 3.1.6] contient (au moins) une erreur typographique : avec les notations adoptées ici, c'est  $X^{(n)}\mu_m = \mu_{m+2n}X^{(n)}$  et  $Y^{(n)}\mu_m = \mu_{m-2n}Y^{(n)}$  qu'il faut lire. Rappelons aussi ([4, 3.1.5]) que  $\mu_n = \mu_m$  si et seulement si  $n \equiv m \pmod{p}$ .

5.4. Revenons maintenant à  $l$  impair non nécessairement premier. Pour les  $\kappa_n = \frac{1}{2l} \sum_{i=0}^{2l-1} q^{-2ni} K^i \in U_{\mathcal{B}}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  considérés dans (2.2) (i), on a la

**Proposition 5.5.** *Soient  $m, n \in \mathbb{Z}$ .*

- (i) *On a  $\kappa_n = \kappa_m$  si et seulement si  $n \equiv m \pmod{l}$ .*
- (ii) *On a*

$$(5.5.1) \quad \kappa_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \begin{bmatrix} K; -2n \\ i \end{bmatrix} (q^i + q^{-i-2n} K) \in \mathfrak{u}_{\mathcal{B}}^0.$$

$$(iii) \quad \text{On a } \kappa_n \kappa_m = \begin{cases} \kappa_n & \text{si } m \equiv n \pmod{l} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (iv) *Si  $l = p$  est premier, via l'application canonique*

$$(5.5.2) \quad U_{\mathcal{B}} \rightarrow \text{Dist}(G)$$

*induite par la projection canonique  $\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{F}_p$ , ( $q \mapsto 1$ ) et telle que  $K \mapsto 1$ , l'image de  $\kappa_n$  est égale à  $\mu_{2n}$ .*

Pour (i), le sens “si” découle de la définition alors que le sens “seulement si” va découler de (iii).  
 Pour (ii), comme

(5.5.3)

$$\begin{aligned}
 F^{(n)}\kappa_n &= \kappa F^{(n)} \quad \text{par (3.3.6)} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} (q^i + q^{-i}K) \right\} F^{(n)} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} F^{(n)}(q^i + q^{-i}q^{-2n}K) \right\} \quad \text{grâce aux relations entre générateurs} \\
 &= F^{(n)} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \begin{bmatrix} K; -2n \\ i \end{bmatrix} (q^i + q^{-i-2n}K) \right\} \quad \text{par [10, 4.1.c],}
 \end{aligned}$$

on doit donc avoir  $\kappa_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \begin{bmatrix} K; -2n \\ i \end{bmatrix} (q^i + q^{-i-2n}K)$ .

(iv) découle aussi de (3.3.6) jointe à [4, Prop. 3.1.6].

(iii) Le coefficient de  $K^r$  dans le membre de droite de  $\kappa_n \kappa_m = \frac{1}{4l^2} \sum_{i,j=0}^{2l-1} q^{-2(ni+mj)} K^{i+j}$  vaut  $\frac{1}{4l^2} \sum_{i+j=r} q^{-2(ni+mj)}$ , la somme étant prise sur les  $(i, j) \in \{(0, r), (1, r-1), \dots, (r, 0), (r+1, 2l-1), (r+2, 2l-2), \dots, (2l-1, r+1)\}$ , et est donc égal à

$$\begin{aligned}
 (5.5.4) \quad & \frac{1}{4l^2} (q^{-2mr} + q^{-2(n+m(r-1))} + q^{-2(2n+m(r-2))} + q^{-2(3n+m(r-3))} + \dots + q^{-2nr} + \\
 & \quad q^{-2((r+1)n+(2l-1)m)} + q^{-2((r+2)n+(2l-2)m)} + \dots + q^{-2((2l-1)n+(r+1)m)}) \\
 &= \frac{q^{-2mr}}{4l^2} (1 + q^{2(m-n)} + q^{4(m-n)} + \dots + q^{2(2l-1)(m-n)}) = \frac{q^{-2mr}}{4l^2} \frac{v^{2l}-1}{v-1} \Big|_{v=q^{2(m-n)}} \\
 &= \begin{cases} \frac{q^{-2mr}}{4l^2} 2l = \frac{q^{-2mr}}{2l} & \text{si } m-n \equiv 0 \pmod{l} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

5.6. On avait introduit dans la théorie modulaire [5, Thm. 1.3] un scindage (non unitaire) noté aussi (le contexte enlevant tout risque de confusion avec (1.5.1) dans les notations)

$$(5.6.1) \quad \phi : \text{Dist}(G) \rightarrow \text{Dist}(G)$$

de l'application canonique de Frobenius

$$(5.6.2) \quad \text{Dist}(\text{Fr}) = \text{Fr} : \text{Dist}(G) \rightarrow \text{Dist}(G).$$

Rappelons que cet endomorphisme  $\phi$ , restreint à  $\text{Dist}(T)$  s'obtient simplement en composant  $\text{Fr}'$  (5.2.2) et la multiplication par  $\mu_0$  (5.3.1). Il résulte immédiatement de (5.5) (iv) spécialisé au cas  $n = 0$  qu'on a

**Corollaire 5.7.** *Pour  $l = p$ , l'application  $\phi$  quantique (1.5.1) relève l'application  $\phi$  modulaire (5.6.1).*

5.8. On revient à la situation de 5.1-5.3.

**Proposition 5.9.** *On a*

$$(5.9.1) \quad \sum_{n=0}^{p-1} \mu_n = 1 \in \text{Dist}(T_1)$$

et cette décomposition est une décomposition en idempotents deux à deux orthogonaux. Les  $\mu_n$ ,  $n \in [0, p[$ , forment une base orthogonale de  $\text{Dist}(T_1)$ . Par rapport à la base standard de  $\text{Dist}(T_1)$  formée des  $\binom{H}{i}$ ,  $i \in [0, p[$ , on a les formules de changement de base pour tout  $n \in [0, p[$

$$(5.9.2) \quad \mu_n = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1-n}{p-1-i} \binom{H}{i},$$

$$(5.9.3) \quad \binom{H}{n} = \sum_{i=n}^{p-1} \binom{i}{n} \mu_i.$$

Le fait que chaque  $\mu_n$  soit un idempotent résulte de [4, 3.1.4] et de [4, 3.1.3] qu'on ait

$$(5.9.4) \quad \begin{aligned} \mu_n &= \binom{H-n-1}{p-1} = \frac{(H-n-1)(H-n-2)\dots(H-n-p+1)}{(p-1)!} \\ &= -(H-n-1)(H-n-2)\dots(H-n-p+1). \end{aligned}$$

Soient  $n < m$ ,  $(n, m) \in [0, p]^2$ . Pour vérifier que  $\mu_m \mu_n = 0$ , il suffit de voir dans  $\text{Dist}(T_1)$  que

$$(5.9.5) \quad \begin{aligned} &(H-m-1)(H-m-2)\dots(H-m-p+1) \\ &\quad (H-n-1)(H-n-2)\dots(H-n-p+1) = 0. \end{aligned}$$

Comme  $-m-p+1 \leq -n$ , on remarque alors que le membre de gauche de (5.9.5) contient le produit  $H(H-1)\dots(H-p+1) = \binom{H}{p} p! = 0$ .

D'autre part, d'après [4, Cor. 3.1.5, Cor. 3.1.3 et Prop. 3.1.1] on a  $\mu_n = \mu_{n-p} = \binom{H+p-n-1}{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-n-1}{p-i-1} \binom{H}{i}$ . Comme la matrice  $[(\binom{p-n-1}{p-i-1})]_{(n,i) \in [0,p]^2}$  est unipotente, les  $\mu_n$ ,  $n \in [0, p[$ , forment une base de  $\text{Dist}(T_1)$ . Ecrivant  $\binom{H}{n} = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \mu_i = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \binom{H-i-1}{p-1}$  et appliquant aux deux côtés les caractères  $\bar{\chi}_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , définis pour tout  $i \in \mathbb{N}$  par

$$(5.9.6) \quad \bar{\chi}_j \left( \binom{H}{i} \right) = \binom{j}{i},$$

on obtient  $[(\binom{p-n-1}{p-i-1})]^{-1} = [(\binom{i}{n})]$ . En particulier,  $1 = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i$ .

5.10. Avec les notations de (5.5), supposons  $l = p$ . On remarquera que la somme  $\sum_{i=0}^{p-1} \kappa_n$  qui se réduit, via (5.5.2) et grâce à (5.5) (iv) en  $\sum_{i=0}^{p-1} \mu_n = 1$  n'est, elle, pas égale à 1 :  $\sum_{i=0}^{p-1} \kappa_n \neq 1$ . On peut remédier à ce "défaut" de la manière suivante.

5.11. Soit  $q^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}$  une racine carrée de  $q$ . Posons, pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(5.11.1) \quad \kappa'_n = \frac{1}{2l} \sum_{i=0}^{2l-1} q^{\frac{-ni}{2}} K^i \in U_q$$

via la spécialisation  $v \rightsquigarrow q$  (3.1.1). On a de manière évidente  $\kappa'_0 = \kappa$  et  $\kappa'_n = \kappa'_m$  si et seulement si  $n \equiv m \pmod{2l}$ .

5.12. Montrons tout d'abord que les  $\kappa'_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , appartiennent à  $U_{\mathcal{B}}$ . Posons pour cela, pour  $n \in \mathbb{Z}$

$$(5.12.1) \quad \bar{\kappa}_n = \frac{1}{2l} \sum_{i=0}^{2l-1} q^{-2ni} (-K)^i \in U_q.$$

Cette quantité ne dépend que de la classe modulo  $l$  de  $n$  et nous étendons donc cette définition et la notation au cas où  $n \in \mathbb{Z}/l$ .

**Lemme 5.13.** *Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a*

$$(5.13.1) \quad \bar{\kappa}_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l-1} \begin{bmatrix} K; -2n \\ i \end{bmatrix} (q^i - q^{-i-2n} K) \in \mathfrak{u}_{\mathcal{B}}^0.$$

Il suffit d'appliquer la transformation de  $K$  en  $-K$  dans (5.5.1) et de remarquer que cette dernière transforme  $\begin{bmatrix} K; -2n \\ i \end{bmatrix}$  en  $\begin{bmatrix} K; -2n \\ i \end{bmatrix}$  pour  $i$  pair et en  $-\begin{bmatrix} K; -2n \\ i \end{bmatrix}$  pour  $i$  impair.

5.14. Bien que certains arguments qui vont suivre restent valides sans ce choix, par souci de clarté, nous faisons désormais pour le reste de cet article le choix  $q^{\frac{1}{2}} = -q^{\frac{l-1}{2}}$ . Rappelons ([10, 4.6]) qu'il existe un automorphisme de  $U$  tel que  $E \mapsto -E$ ,  $F \mapsto F$  and  $K \mapsto -K$ ; nous le noterons  $\tilde{\cdot}$ .

**Lemme 5.15.** (i) *On a*

$$(5.15.1) \quad \kappa'_n = \begin{cases} \kappa_{\frac{n}{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \bar{\kappa}_{\frac{n}{4}} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

et donc  $\kappa'_n \in \mathfrak{u}_{\mathcal{B}}^0$ .

(ii) *On a*

$$(5.15.2) \quad \widetilde{\kappa'_n} = \begin{cases} \bar{\kappa}_{\frac{n}{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \kappa_{\frac{n}{4}} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

(iii) *Si  $l$  est premier, pour tout  $n$  impair  $\kappa'_n$  est d'image nulle via le morphisme canonique (5.5.2).*

Pour (i), c'est une conséquence immédiate de la définition de  $q^{\frac{1}{2}}$ , de  $\kappa_n$  et de  $\kappa'_n$  et pour (iii) de 5.13.

Pour (ii), si  $n$  est pair, on a

$$(5.15.3) \quad \begin{aligned} \widetilde{\kappa'_n} &= \widetilde{\kappa_{\frac{n}{4}}} \quad \text{grâce à (i)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \begin{bmatrix} -K; -\frac{n}{2} \\ i \end{bmatrix} (q^i - q^{-i-\frac{n}{2}} K) \quad \text{grâce à la Prop. 5.5} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l-1} \begin{bmatrix} K; -\frac{n}{2} \\ i \end{bmatrix} (q^i - q^{-i-\frac{n}{2}} K) = \bar{\kappa}_{\frac{n}{4}}, \end{aligned}$$

(qui est donc distinct de  $\kappa'_n$ ). De même pour  $n$  impair.

**Proposition 5.16.** *On a*

$$(5.16.1) \quad \sum_{n=0}^{2l-1} \kappa'_n = 1$$

et cette décomposition est une décomposition en idempotents deux à deux orthogonaux dans  $U_{\mathcal{B}}$ . La famille des  $\kappa'_n$ ,  $n \in [0, 2l[$ , forme une base orthogonale de  $\mathfrak{u}_{\mathcal{B}}^0 \otimes \mathbb{Q}(q)$  telle que  $K^m = \sum_{n=0}^{2l-1} (q^{\frac{1}{2}})^{mn} \kappa'_n$  pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ .

Il suffit de vérifier l'assertion après extension des scalaires à  $\mathbb{Q}[q]$ . Si  $m > n$  avec  $m, n \in [0, l[$ , on a

$$(5.16.2) \quad \kappa'_m \kappa'_n = \frac{1}{4l^2} \sum_{i,j=0}^{2l-1} q^{-\frac{mi+nj}{2}} K^{i+j},$$

expression dans laquelle le coefficient de  $K^k$  pour  $k \in [0, 2l[$  vaut  $\frac{1}{4l^2} \sum_{(i,j)} q^{-\frac{mi+nj}{2}}$  avec  $(i, j)$  un élément dans l'ensemble  $\{(0, k), (1, k-1), \dots, (k, 0), (k+1, 2l-1), (k+2, 2l-2), \dots, (2l-1, k+1)\}$ , laquelle somme est égale, une fois posé  $\zeta = q^{\frac{1}{2}}$ , à

$$(5.16.3) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{4l^2} \{ \zeta^{-kn} + \zeta^{-m-(k-1)n} + \dots + \\ & \quad \zeta^{-mk} + \zeta^{-(k+1)m-(2l-1)n} + \zeta^{-(k+2)m-(2l-2)n} + \dots + \zeta^{-(2l-1)m-(k+1)n} \} \\ &= \frac{\zeta^{-kn}}{4l^2} \{ 1 + \zeta^{-(m-n)} + \zeta^{-2(m-n)} + \dots + \zeta^{-(2l-1)(m-n)} \} \\ &= \frac{\zeta^{-kn}}{4l^2} \left( \frac{v^{2l} - 1}{v - 1} \right)_{v=\zeta^{-(m-n)}} = 0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'orthogonalité  $\kappa'_m \kappa'_n = 0$ . Pour vérifier que  $\kappa'_0 + \kappa'_1 + \dots + \kappa'_{2l-1} = 1$ , soit  $\chi'_m \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{Q}[q]}(\mathfrak{u}_q^0, \mathbb{Q}[\zeta])$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , tel que  $\chi'_m(K) = \zeta^m [1, 1]$ . Il est clair que les  $\chi'_m$ , pour  $m \in \mathbb{N}$ , séparent les éléments de  $\mathfrak{u}_q^0 \simeq (\mathbb{Q}[q])[x]/(x^{2l} - 1)$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a

$$(5.16.4) \quad \chi'_m(\kappa'_0 + \kappa'_1 + \dots + \kappa'_{2l-1}) = \frac{1}{2l} \sum_{i,j=0}^{2l-1} \zeta^{(m-j)i} = 1,$$

d'où l'égalité (5.16.1).

**Corollaire 5.17.** (i) *L'algèbre  $U_{\mathcal{B}}$  admet une décomposition en somme directe*

$$(5.17.1) \quad U_{\mathcal{B}} = \coprod_{n,m=0}^{2l-1} \kappa'_n U_{\mathcal{B}} \kappa'_m$$

telle que  $\text{Fr}(\kappa'_n U_{\mathcal{B}} \kappa'_m) \neq 0$  si et seulement si  $n = m = 0$  et telle que  $\phi : U_{\mathcal{B}} \rightarrow U_{\mathcal{B}}$  se factorise à travers  $\kappa'_0 U_{\mathcal{B}} \kappa'_0 = \kappa U_{\mathcal{B}} \kappa$ .

(ii) *Posons  $\kappa^+ = \sum_{m \in [0, l[} \kappa'_{2m}$  et  $\kappa^- = \sum_{m \in [0, l[} \kappa'_{2m+1}$ . Tout  $U_q$ -module  $M$  se décompose en une somme directe  $M = (\kappa^+ M) \oplus (\kappa^- M)$  telle que  $K^l$  agisse sur  $\kappa^+ M$  (resp.  $\kappa^- M$ ) par 1 (resp.  $-1$ ).*

5.18. Soit  $\mathfrak{u}_q$  la  $\mathbb{Q}(q)$ -sous-algèbre de  $U_q$  (3.1.1) engendrée par  $E, F, K$ . Elle admet donc une décomposition  $\mathfrak{u}_q = \coprod_{n=0}^{2l-1} \mathfrak{u}_q \kappa'_n$  en sous-modules qui sont projectifs et telle que chaque  $\mathfrak{u}_q \kappa'_n$  ait une base  $\mathbb{Q}(q)$ -linéaire constituée des  $E^{(a)} F^{(b)} \kappa'_n$  ( $a, b \in [0, l[$ ). On a

$$(5.18.1) \quad K \kappa'_n = \frac{1}{2l} \sum_{i=0}^{2l-1} \zeta^{-ni} K^{i+1} = \zeta^n \kappa'_n = (-1)^n q^{\frac{(1-l)n}{2}} \kappa'_n,$$

et en particulier,  $K^l \kappa'_n = (-1)^n \kappa'_n$ . Comme alors

$$(5.18.2) \quad KE^{(a)} F^{(b)} \kappa'_n = (-1)^n q^{\frac{(1-l)n}{2} + 2(a-b)} E^{(a)} F^{(b)} \kappa'_n,$$

on dira que  $E^{(a)} F^{(b)} \kappa'_n$  a pour poids  $((-1)^n, \frac{(1-l)n}{2} + 2(a-b))$ .

**Définition 5.19.** On dit qu'un  $\mathfrak{u}_q$ -module de dimension finie  $M$  est intégrable de type 1 (resp. -1) si et seulement si  $M$  admet une  $\mathbb{Q}(q)$ -base constituée de vecteurs de poids appartenant à  $\{1\} \times \mathbb{Z}$  (resp.  $\{-1\} \times \mathbb{Z}$ ).

Ainsi,  $\mathfrak{u}_q \kappa'_n$  est intégrable de type  $(-1)^n$  et projectif. Notons que l'on a  $\{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = \{((-1)^n, \frac{(1-l)n}{2} \bmod l) \mid n \in [0, 2l]\}$ .

Si  $M$  est un  $\mathfrak{u}_q$ -module intégrable de type  $-1$ , on remarquera qu'en tordant l'action de  $\mathfrak{u}_q$  par l'automorphisme  $\sim$  (5.14), on obtient un  $\mathfrak{u}_q$ -module intégrable de type 1 qu'on notera  $\tilde{M}$ .

**Proposition 5.20.** *Tout  $\mathfrak{u}_q$ -module intégrable indécomposable injectif/projectif est facteur direct d'un  $\mathfrak{u}_q \kappa'_n$  avec  $n \in [0, 2l]$ .*

Soient en effet  $Q$  un  $\mathfrak{u}_q$ -module intégrable indécomposable projectif et un épimorphisme de  $\mathfrak{u}_q$ -modules :  $\mathfrak{u}_q^{\oplus m} \rightarrow Q$  avec  $m \in \mathbb{N}$ . Comme chaque  $\mathfrak{u}_q \kappa'_n$  est intégrable (5.18), c'est un épimorphisme de  $\mathfrak{u}_q$ -modules intégrables qui donc se scinde par projectivité de  $Q$ . L'assertion découle alors du théorème de Krull-Schmidt-Azumaya.

5.21. Rappelons ([2]) maintenant quelques généralités sur les  $\mathfrak{u}_q$ -modules intégrables de type 1. Les objets simples sont des modules notés  $\bar{L}_q(m)$ , avec  $m \in \mathbb{Z}$ , de plus haut poids  $m$ . On a  $\bar{L}_q(m) = \bar{L}_q(m')$  si et seulement si  $m \equiv m' \bmod l$ . On note  $Q_q(m)$  la couverture projective (qui est aussi l'enveloppe injective) de  $\bar{L}_q(m)$ . Soit  $\mathfrak{u}_q^{\geq 0}$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{u}_q$  engendrée par  $E$  et  $H$ . Pour  $m \in \mathbb{Z}$ , désignons encore par  $m$  le  $\mathfrak{u}_q^{\geq 0}$ -module  $\mathbb{Q}(q)$  tel que  $K \cdot 1 = q^m$  et  $E \cdot 1 = 0$ , et posons  $\bar{\Delta}_q(m) = \mathfrak{u}_q \otimes_{\mathfrak{u}_q^{\geq 0}} m$ . On a alors  $Q_q(l-1) = \bar{L}_q(l-1) = \bar{\Delta}_q(l-1)$  qui n'est autre que le module de Steinberg que nous noterons en abrégé  $\text{St}_q$ . Chaque  $Q_q(m)$  (resp.  $\bar{\Delta}_q(m)$ ) pour  $m \in [0, l-1[$  est, quant à lui, une extension non scindée de  $\bar{\Delta}_q(l-m-2)$  (resp.  $\bar{L}_q(l-m-2)$ ) par  $\bar{\Delta}_q(m)$  (resp.  $\bar{L}_q(m)$ ).

**Proposition 5.22.** *Soit  $n \in [0, 2l]$ .*

(i) *Si  $n = 2m$  est pair, on a*

$$(5.22.1) \quad \mathfrak{u}_q \kappa'_n = \coprod_{r \in \mathbb{Z} \cap ([0, \frac{m}{2}] \cup [m, \frac{l+m-1}{2}])} Q_q(2r-m) \text{ avec } Q_q(2r-m) = \text{St}_q \text{ pour } r = \begin{cases} \frac{l+m-1}{2} & \text{si } m \text{ pair} \\ \frac{m-1}{2} & \text{si } m \text{ impair} \end{cases}.$$

(ii) *Si  $n$  est impair, on a*

$$(5.22.2) \quad \widetilde{\mathfrak{u}_q \kappa'_n} = \begin{cases} \coprod_{r \in \mathbb{Z} \cap ([0, \frac{l-1}{4}] \cup [\frac{l+1}{2}, \frac{3l+1}{4}])} Q_q(2r + \frac{l-1}{2}) & \text{si } n = 1 \\ \coprod_{r \in \mathbb{Z} \cap ([0, \frac{l+n}{4}] \cup [\frac{l+n}{2}, \frac{3l+n}{4}])} Q_q(2r + \frac{(l-1)n}{2}) & \text{si } 1 < n < l \\ \coprod_{r \in \mathbb{Z} \cap ([0, \frac{n-l}{4}] \cup [\frac{n-l}{2}, \frac{l+n}{4}])} Q_q(2r + \frac{(l-1)n}{2}) & \text{si } n \geq l \end{cases}$$

avec  $Q_q(2r - \frac{(1-l)n}{2}) = \text{St}_q$  pour  $r$  avec  $4r \equiv n-2 \bmod l$ .

Pour (i), nous aurons à utiliser l'involution  $\Omega$  de  $\mathcal{B}$ -algèbre définie par

$$(5.22.3) \quad \Omega(E) = F, \quad \Omega(F) = E, \quad \Omega(K) = K^{-1}.$$

Examinons l'action de  $F^{(l-1)}$  sur les vecteurs primitifs  $E^{(l-1)}F^{(r)}\kappa'_n$  de poids  $2(l-1-r) + m$ ,  $m \in [0, l[$ . On a

(5.22.4)

$$\begin{aligned}
F^{(l-1)}E^{(l-1)}F^{(r)}\kappa'_n &= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}(-1)^i \begin{bmatrix} K; -i + 2(l-1) - 1 \\ i \end{bmatrix} F^{(l-1-i)}F^{(r)}\kappa'_n \\
&\quad \text{en appliquant } \Omega \text{ (5.22.3) à [10, 4.1.a]} \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}(-1)^i \begin{bmatrix} K; -i + 2l - 3 \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l-1-i+r \\ r \end{bmatrix} F^{(l-1-i+r)}\kappa'_n \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}(-1)^i \begin{bmatrix} l-1-i+r \\ r \end{bmatrix} F^{(l-1-i+r)} \begin{bmatrix} K; -i + 2l - 3 - 2(l-1-i+r) \\ i \end{bmatrix} \kappa'_n \\
&\quad \text{grâce à [10, 4.1.c]} \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}F^{(l-1-i+r)}(-1)^i \begin{bmatrix} l-1-i+r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K; i - 2r - 1 \\ i \end{bmatrix} \kappa'_n \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}F^{(l-1-i+r)}(-1)^i \begin{bmatrix} l-1-i+r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m + i - 2r - 1 \\ i \end{bmatrix} \kappa'_n \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}F^{(l-1-i+r)} \begin{bmatrix} l-1-i+r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r - m \\ i \end{bmatrix} \kappa'_n.
\end{aligned}$$

Si  $0 \leq r < \frac{m}{2}$  or  $m \leq r \leq \frac{l+m-1}{2}$ , avec  $i = r$  on a  $\begin{bmatrix} l-1-i+r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r-m \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l-1 \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r-m \\ r \end{bmatrix} \neq 0$ , et donc  $\coprod_{r \in \mathbb{Z} \cap ([0, \frac{m}{2}] \cup [m, \frac{l+m-1}{2}])} \bar{\Delta}_q(m-2-2r) \subseteq \mathfrak{u}_q \kappa'_n$ . Alors  $\mathfrak{u}_q \kappa'_n = \coprod_{r \in \mathbb{Z} \cap ([0, \frac{m}{2}] \cup [m, \frac{l+m-1}{2}])} Q_q(2r-m)$  pour des raisons de dimension avec  $Q_q(2r-m) = \text{St}_q$  pour  $r = \frac{l+m-1}{2}$  (resp.  $r = \frac{m-1}{2}$ ) si  $m$  est pair (resp. si  $m$  est impair).

De même pour (ii),

$$\begin{aligned}
F^{(l-1)}E^{(l-1)}F^{(r)}\kappa'_n &= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}F^{(l-1-i+r)}(-1)^i \begin{bmatrix} l-1-i+r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K; i - 2r - 1 \\ i \end{bmatrix} \kappa'_n \\
(5.22.5) \quad &= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}F^{(l-1-i+r)} \begin{bmatrix} l-1-i+r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(l-1)n}{2} + i - 2r - 1 \\ i \end{bmatrix} \kappa'_n \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} E^{(l-1-i)}F^{(l-1-i+r)}(-1)^i \begin{bmatrix} l-1-i+r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r + \frac{(l-1)n}{2} \\ i \end{bmatrix} \kappa'_n.
\end{aligned}$$

Donc, pour  $r \in [0, l[$  satisfaisant une des conditions suivantes :  $r \leq 2r + \frac{(l-1)n}{2} \leq l-1$  ou  $l \leq 2r + \frac{(l-1)n}{2} < 2l$  avec  $2r + \frac{(l-1)n}{2} - l \geq r$  ou  $2l \leq 2r + \frac{(l-1)n}{2} < 3l$  avec  $2r + \frac{(l-1)n}{2} - 2l \geq r$  ou  $3l \leq 2r + \frac{(l-1)n}{2} < 4l$  avec  $2r + \frac{(l-1)n}{2} - 3l \geq r$  ou ..., autrement dit une des conditions suivantes :  $r \leq \frac{(2-n)(l-1)}{4}$  ou  $\frac{l(2-n)+n}{2} \leq r < \frac{l(4-n)+n}{4}$  ou  $\frac{l(4-n)+n}{2} \leq r < \frac{l(6-n)+n}{4}$  ou  $\frac{l(6-n)+n}{2} \leq r < \frac{l(8-n)+n}{4}$  ou  $\frac{l(8-n)+n}{2} \leq r < \frac{l(10-n)+n}{4}$  ou ..., si l'on prend  $i = r$ , on obtient  $\begin{bmatrix} l-1-i+r \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r + \frac{(l-1)n}{2} \\ i \end{bmatrix} \neq 0$ . Donc  $\coprod_r \bar{\Delta}_q(\frac{(l-1)n}{2} + 2(l-1-r)) = \coprod_r \bar{\Delta}_q(\frac{(l-1)n}{2} - 2 - 2r) \subseteq \widehat{\mathfrak{u}_q \kappa'_n}$  pour tout  $r$  satisfaisant une

des conditions ci-dessus, et par suite  $\widetilde{\mathbf{u}_q \kappa'_n} = \prod_r Q_q(2r - \frac{(1-l)n}{2})$  pour des raisons de dimension avec  $Q_q(2r - \frac{(1-l)n}{2}) = \text{St}_q$  pour  $r$  avec  $2r - \frac{(1-l)n}{2} \equiv l-1 \pmod{l}$ .

5.23. Nous verrons plus loin (5.29) la variante modulaire de 5.22 mais l'on va tout d'abord introduire la généralisation suivante de (5.9) qui nous sera utile plus bas. Posons, pour tous  $r \in \mathbb{N}^+$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(5.23.1) \quad \mu_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{p^r-1} (-1)^i \binom{H-n}{i} \in \text{Dist}(T_r),$$

si bien que  $\mu_n^{(1)}$  désigne le  $\mu_n$  introduit en (5.3.1).

**Proposition 5.24.** *Soit  $r \in \mathbb{N}^+$ .*

- (i) *Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $\mu_n^{(r)} = \binom{H-n-1}{p^r-1} = \sum_{i=0}^{p^r-1} \binom{-1}{p^r-1-i} \binom{H-n}{i} \in \text{Dist}(T_r)$ .*
- (ii) *Pour tous  $n, m \in \mathbb{Z}$ , on a  $\mu_n^{(r)} = \mu_m^{(r)}$  si et seulement si  $n \equiv m \pmod{p^r}$ .*
- (iii) *Soient  $\phi$  le scindage de Frobenius modulaire (5.6.1) et  $\text{Fr}'$  le morphisme (5.2.2). Pour tous  $m \in [0, p[$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mu_{m+np}^{(r+1)} = \mu_m \text{Fr}'(\mu_n^{(r)})$ , et donc  $\phi(\mu_n^{(r)}) = \mu_{np}^{(r+1)}$ .*
- (iv) *Les  $\mu_n^{(r)}$  pour  $n \in [0, p^r[$ , fournissent une décomposition de 1 en idempotents orthogonaux deux à deux. En particulier,  $\mu_0^{(r)}$  est l'unique mesure involutive invariante de  $\text{Dist}(T_r)$ , i.e., pour tout  $\mu \in \text{Dist}(T_r)$ ,  $\mu \mu_0^{(r)} = \varepsilon(\mu) \mu_0$  avec  $\varepsilon = \bar{\chi}_0$  (5.9.6) la coïunité de  $\text{Dist}(T_r)$ .*
- (v) *Les  $\mu_n^{(r)}$ , pour  $n \in [0, p^r[$ , forment une base orthogonale de  $\text{Dist}(T_r)$ . Par rapport à la base standard de  $\text{Dist}(T_r)$  formée des  $\binom{H}{i}$ ,  $i \in [0, p^r[$ , on a les formules de changement de base pour tout  $n \in [0, p^r[$  :*

$$(5.24.1) \quad \mu_n^{(r)} = \mu_{n-p^r}^{(r)} = \sum_{i=0}^{p^r-1} \binom{p^r-1-n}{p^r-1-i} \binom{H}{i},$$

$$(5.24.2) \quad \binom{H}{n} = \sum_{i=0}^{p^r-1} \binom{i}{n} \mu_i^{(r)} = \sum_{i=n}^{p^r-1} \binom{i}{n} \mu_i^{(r)}.$$

Plus généralement, pour tous  $m \in \mathbb{Z}$  et  $n \in [0, p^r[$ ,

$$(5.24.3) \quad \binom{H-m}{n} = \sum_{i=0}^{p^r-1} \binom{i-m}{n} \mu_i^{(r)}$$

- (vi) *Pour tout  $n \in [0, p^r[$ , on a  $\text{Dist}(\text{Fr}^r)(\mu_n^{(r)}) = \text{Dist}(\text{Fr})^r(\mu_n^{(r)}) = \delta_{n0}$ .*

Pour (i), la seconde égalité résulte de [4, Cor. 3.1.2]. Comme on a aussi

$$(5.24.4) \quad \binom{-1}{p^r-1-i} = \frac{(-1)(-2) \dots (-1-(p^r-1-i)+1)}{(p^r-1-i)!} = (-1)^{p^r-1-i} \frac{(p^r-1-i)!}{(p^r-1-i)!} = (-1)^i,$$



l'assertion en découle. Pour (ii), on prouve d'abord le sens "si" pour lequel il suffit de montrer que  $\mu_{n-p^r}^{(r)} = \mu_n^{(r)}$ . Or,

$$\begin{aligned}
 \mu_{n-p^r}^{(r)} &= \binom{H+p^r-n-1}{p^r-1} \quad \text{par (i)} \\
 (5.24.5) \quad &= \sum_{i=0}^{p^r-1} \binom{p^r}{p^r-1-i} \binom{H-n-1}{i} \quad \text{grâce à [4, Cor. 3.1.2] de nouveau} \\
 &= \binom{H-n-1}{p^r-1} \\
 &= \mu_n^{(r)} \quad \text{par (i)}.
 \end{aligned}$$

Pour (iii), soient  $m \in [0, p[$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Grâce à ce qu'on vient juste de démontrer, on peut supposer  $n \in [0, p^r[$ . On a

$$\begin{aligned}
 \mu_{m+np}^{(r+1)} &= \mu_{m+np-p^{r+1}}^{(r+1)} \quad \text{partie "si" de (ii) de nouveau} \\
 &= \binom{H+p^{r+1}-m-np-1}{p^{r+1}-1} \quad \text{par (i)} \\
 &= \sum_{i=0}^{p^{r+1}-1} \binom{p^{r+1}-m-np-1}{p^{r+1}-1-i} \binom{H}{i} \quad \text{par [4, Prop. 3.1.1]} \\
 (5.24.6) \quad &= \sum_{i=0}^{p^{r+1}-1} \binom{p(p^r-n-1)+p-m-1}{p(p^r-i_1-1)+p-i_0-1} \binom{H}{i_0+i_1p} \quad \text{si l'on écrit } i = i_0 + i_1p \\
 &\quad \text{avec } i_0 \in [0, p[ \text{ et } i_1 \in \mathbb{N} \\
 &= \sum_{i=0}^{p^{r+1}-1} \binom{p^r-n-1}{p^r-i_1-1} \binom{p-m-1}{p-i_0-1} \binom{H}{i_0} \binom{H}{i_1p} \\
 &= \mu_m \text{Fr}'(\mu_n^{(r)}).
 \end{aligned}$$

La première assertion de (iv) découle maintenant de (5.9) grâce à (iii) car  $\text{Fr}'$  est un homomorphisme de  $\mathbb{F}_p$ -algèbres. La partie "seulement si" de (ii) en découle également. Quant aux formules de changement de base (v), elles se prouvent comme dans la proposition (5.9) à l'aide des  $\bar{\chi}_j$ . L'assertion (vi) découle immédiatement de (v).

5.25. A l'aide de cette base orthogonale de  $\text{Dist}(T_r)$  formée par les  $\mu_n^{(r)}$  (5.23.1), on peut voir que les  $X^{(a)}\mu_b^{(r)}Y^{(c)}$  forment, pour  $a, b, c \in [0, p^r[$ , une base de  $\text{Dist}(G_r)$ . Outre (5.1.1), les relations entre ces éléments (correspondantes à (5.1.2)-(5.1.3)) définissant  $\text{Dist}(G_r)$  s'expriment comme suit.

**Proposition 5.26.** *Soient  $a, b, c \in [0, p^r[$ .*

- (i)  $X^{(a)}\mu_b^{(r)} = \mu_{b+2a}^{(r)}X^{(a)}, \quad Y^{(c)}\mu_b^{(r)} = \mu_{b-2c}^{(r)}Y^{(c)}.$
- (ii)  $X^{(a)}Y^{(c)} = \sum_{i=0}^{\min\{a,c\}} \sum_{j=0}^{p^r-1} \binom{j-a-c+2i}{i} Y^{(c-i)}\mu_j^{(r)}X^{(a-i)}.$

(i) Combinant (5.24.1) et (5.1.2), on a en effet pour tout  $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 (5.26.1) \quad X^{(a)}\mu_n^{(r)} &= X^{(a)} \binom{H-n-1}{p^r-1} \quad \text{par 5.24 (i)} \\
 &= \binom{H-2a-n-1}{p^r-1} X^{(a)} \quad \text{par (5.1.2)} \\
 &= \mu_{n+2a}^{(r)} X^{(a)} \quad \text{par 5.24 (i).}
 \end{aligned}$$

Par un calcul analogue (ou en utilisant l'involution de Chevalley),

$$(5.26.2) \quad Y^{(c)}\mu_n^{(r)} = \mu_{n-2c}^{(r)} Y^{(c)}.$$

(ii) découle de (5.1.3) et de la formule de changement de base (5.24.1).

**Corollaire 5.27.** *Soit  $r \in \mathbb{N}^+$ .*

(i) *Si  $1 \leq s \leq r$ ,  $\text{Dist}(G_r)$  admet une décomposition en somme directe*

$$(5.27.1) \quad \text{Dist}(G_r) = \coprod_{n,m=0}^{p^s-1} \mu_n^{(s)} \text{Dist}(G_r) \mu_m^{(s)}$$

*et chaque  $\mu_n^{(s)} \text{Dist}(G_r) \mu_m^{(s)}$  est un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de base  $X^{(a)}Y^{(c)}\mu_{kp^s+m}^{(r)}$  avec  $k \in [0, p^{r-s}[$ ,  $a, c \in [0, p^r[$  tels que  $n+2c \equiv m+2a \pmod{p^s}$ .*

(ii)  *$\text{Dist}(G)$  admet une décomposition en somme directe*

$$(5.27.2) \quad \text{Dist}(G) = \coprod_{n,m=0}^{p^r-1} \mu_n^{(r)} \text{Dist}(G) \mu_m^{(r)}$$

*et chaque  $\mu_n^{(r)} \text{Dist}(G_{r+s}) \mu_m^{(r)}$ ,  $s \in \mathbb{N}^+$ , est un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de base  $X^{(a)}Y^{(c)}\mu_{kp^r+m}^{(r+s)}$ , avec  $k \in [0, p^s[$ ,  $a, c \in [0, p^{r+s}[$  tels que  $n+2c \equiv m+2a \pmod{p^r}$ .*

La proposition 5.24 (iv) permet d'écrire

$$\begin{aligned}
 (5.27.3) \quad \text{Dist}(T_r)\mu_m^{(s)} &= \coprod_{k=0}^{p^r-1} \mathbb{F}_p \mu_k^{(r)} \mu_m^{(s)} \\
 &= \coprod_{k=0}^{p^r-1} \mathbb{F}_p \mu_{k_0}^{(s)} (\text{Fr}')^s (\mu_{k_1}^{(r-s)}) \mu_m^{(s)} \quad \text{avec } k = k_0 + k_1 p^s \text{ et } k_0 \in [0, p^s[, k_1 \in \mathbb{N} \\
 &= \coprod_{k=0}^{p^{r-s}-1} \mathbb{F}_p \mu_m^{(s)} (\text{Fr}')^s (\mu_k^{(r-s)}) = \coprod_{k=0}^{p^{r-s}-1} \mathbb{F}_p \mu_{m+kp^s}^{(r)}.
 \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
 (5.27.4) \quad \mu_n^{(s)} E^{(a)} F^{(c)} \mu_{m+kp^s}^{(r)} &= E^{(a)} F^{(c)} \mu_{n-2a+2c}^{(s)} \mu_{m+kp^s}^{(r)} \quad \text{par 5.26} \\
 &= \begin{cases} E^{(a)} F^{(c)} \mu_{m+kp^s}^{(r)} & \text{si } n-2a+2c \equiv m \pmod{p^s} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

5.28. Les arguments utilisés pour prouver le corollaire 5.27, spécialisés au cas  $r = 1$ , donne l'existence d'une décomposition  $\text{Dist}(G_1) = \coprod_{n=0}^{p-1} \text{Dist}(G_1)\mu_n$  de  $\text{Dist}(G_1)$  en somme de  $\text{Dist}(G_1)$ -modules à la fois projectifs et injectifs que nous allons maintenant identifier. Notons  $\bar{L}(m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  les  $\text{Dist}(G_1)$ -modules simples de plus haut poids  $m$  avec  $\bar{L}(m) = \bar{L}(m')$  si et seulement si  $m \equiv m' \pmod{p}$ . Soit  $Q(m)$  la couverture projective (qui est aussi l'enveloppe injective) de  $\bar{L}(m)$ . Soit  $\text{Dist}(B_1^+)$  la sous-algèbre de  $\text{Dist}(G_1)$  engendrée par  $X$  et  $H$ . Pour  $m \in \mathbb{F}_p$ , désignons encore par  $m$  le  $\text{Dist}(B_1^+)$ -module  $\mathbb{F}_p$  tel que  $H \cdot 1 = m$  et  $X \cdot 1 = 0$ , et posons alors  $\bar{\Delta}(m) = \text{Dist}(G_1) \otimes_{\text{Dist}(B_1^+)} m$ . On a  $Q(p-1) = \bar{L}(p-1) = \bar{\Delta}(p-1)$  qui n'est autre que le module de Steinberg que nous noterons en abrégé  $\text{St}$ . Chaque  $Q(m)$  pour  $m \in [0, p-1[$  est, quant à lui, une extension non scindée de  $\bar{\Delta}(p-m-2)$  par  $\bar{\Delta}(m)$ . Le même argument que dans la proposition 5.22 fournit la proposition suivante.

**Proposition 5.29.** (i) Si  $p = 2$ ,  $\text{Dist}(G_1)\mu_0 = Q(0)$  alors que  $\text{Dist}(G_1)\mu_1 = \text{St} \oplus \text{St}$ .  
(ii) Si  $p$  est impair, on a, pour tout  $n \in [0, p[$  pair

$$\text{Dist}(G_1)\mu_n = \coprod_{m \in \mathbb{Z} \cap ([0, \frac{n-2}{2}] \cup [n, \frac{p+n-1}{2}])} Q(2m-n) \quad \text{avec } Q(2m-n) = \text{St} \text{ pour } m = \frac{p+n-1}{2}.$$

(iii) Si  $p$  est impair, on a, pour tout  $n \in [0, p[$  impair,

$$\text{Dist}(G_1)\mu_n = \coprod_{m \in \mathbb{Z} \cap ([0, \frac{n-1}{2}] \cup [n, \frac{p+n-2}{2}])} Q(2m-n) \quad \text{avec } Q(2m-n) = \text{St} \text{ pour } m = \frac{n-1}{2}.$$

5.30. On peut aussi déduire de la simple existence des idempotents (5.23.1) et de leurs propriétés une nouvelle preuve de l'existence du scindage de  $\text{Dist}(\text{Fr})$  sur  $\text{Dist}(G)$  de [4]. Commençons par le

**Lemme 5.31.** L'ensemble  $\sum_{a,b,c \in \mathbb{N}} \sum_{n \in [0, p^b[} \mathbb{F}_p X^{(pa)} Y^{(pc)} \mu_{np^b}^{(1+b)}$  est une sous- $\mathbb{F}_p$ -algèbre de  $\mu_0 \text{Dist}(G) \mu_0$ .

Par 5.27, chaque  $X^{(pa)} Y^{(pc)} \mu_{np^b}^{(1+b)}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ,  $n \in [0, p^b[$ , appartient à  $\mu_0 \text{Dist}(G) \mu_0$ . Pour tous  $r, s, t \in \mathbb{N}$ ,  $m \in [0, p^s[$ , prenant  $l > \max\{b, s\}$  tel que  $p^l > \max\{pc, pr\}$ , on a, par 5.26

(5.31.1)

$$\begin{aligned} X^{(pa)} Y^{(pc)} \mu_{np^b}^{(1+b)} X^{(pr)} Y^{(pt)} \mu_{mp^s}^{(1+s)} &= X^{(pa)} Y^{(pc)} X^{(pr)} Y^{(pt)} \mu_{np^b-2pr+2pt}^{(1+b)} \mu_{mp^s}^{(1+s)} \\ &= X^{(pa)} \left\{ \sum_{i=0}^{\min\{pc, pr\}} \sum_{j=0}^{p^l-1} \binom{j-pr-pc+2i}{i} X^{(pr-i)} \mu_j^{(l)} Y^{(pc-i)} \right\} Y^{(pt)} \mu_{np^b-2pr+2pt}^{(1+b)} \mu_{mp^s}^{(1+s)} \\ &= \sum_{i=0}^{\min\{pc, pr\}} \sum_{j=0}^{p^l-1} \binom{j-pr-pc+2i}{i} X^{(pa)} X^{(pr-i)} Y^{(pc-i)} Y^{(pt)} \mu_{j+2(pc-i+pt)}^{(l)} \mu_{np^b-2pr+2pt}^{(1+b)} \mu_{mp^s}^{(1+s)} \\ &= \sum_{i=0}^{\min\{pc, pr\}} \sum_{j=0}^{p^l-1} \binom{j-pr-pc+2i}{i} \binom{pa+pr-i}{pa} X^{(pa+pr-i)} \binom{pc+pt-i}{pt} Y^{(pc-i+pt)} \\ &\quad \mu_{j+2(pc-i+pt)}^{(l)} \mu_{np^b-2pr+2pt}^{(1+b)} \mu_{mp^s}^{(1+s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^l-1} \binom{j-pr-pc+2ip}{ip} \binom{pa+pr-ip}{pa} X^{(pa+pr-ip)} \binom{pc+pt-ip}{pt} Y^{(pc-ip+pt)} \\
&\quad \mu_{j+2(pc-ip+pt)}^{(l)} \mu_{np^b-2pr+2pt}^{(1+b)} \mu_{mp^s}^{(1+s)} \\
&= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{jp-pr-pc+2ip}{ip} \binom{a+r-i}{a} X^{(p(a+r-i))} \binom{c+t-i}{t} Y^{(p(c-i+t))} \\
&\quad \mu_{jp+2p(c-i+t)}^{(l)} \mu_{np^b-2pr+2pt}^{(1+b)} \mu_{mp^s}^{(1+s)} \\
&= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-a-c+2i}{i} \binom{a+r-i}{a} \binom{c+t-i}{t} X^{(p(a+r-i))} Y^{(p(c-i+t))} \\
&\quad \mu_{p(j+2(c-i+t))}^{(l)} \mu_{np^b-2pr+2pt}^{(1+b)} \mu_{mp^s}^{(1+s)}
\end{aligned}$$

avec

(5.31.2)

$$\begin{aligned}
&\mu_{p(j+2(c-i+t))}^{(l)} \mu_{np^b-2pr+2pt}^{(1+b)} \mu_{mp^s}^{(1+s)} \\
&= \begin{cases} \mu_{p(j+2(c-i+t))}^{(l)} & \text{si } b = s = 0 \text{ ou bien si } b > 0 \text{ et } s = 0 \text{ avec} \\ & j + 2(c - i + t) \equiv np^{b-1} - 2r + 2t \pmod{p^b} \text{ ou bien si } b = 0 \text{ et } s > 0 \text{ avec} \\ & j + 2(c - i + t) \equiv np^{b-1} - 2r + 2t \pmod{p^s} \text{ ou bien finalement si } b, s > 0 \text{ et à la fois} \\ & j + 2(c - i + t) \equiv np^{b-1} - 2r + 2t \pmod{p^b} \\ & j + 2(c - i + t) \equiv np^{b-1} - 2r + 2t \pmod{p^s} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

5.32. Étendons maintenant linéairement à  $\text{Dist}(G)$  l'endomorphisme  $\text{Fr}'$  (5.2.2) de  $\text{Dist}(T)$  par

$$(5.32.1) \quad X^{(a)} \mu_n^{(1+b)} Y^{(c)} \mapsto X^{(ap)} \text{Fr}'(\mu_n^{(1+b)}) Y^{(cp)}$$

pour tous  $a, b, c \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Alors

**Théorème 5.33.** *L'application*

$$(5.33.1) \quad \phi : \text{Dist}(G) \rightarrow \sum_{a,b,c \in \mathbb{N}} \sum_{n \in [0, p^b[} \mathbb{F}_p X^{(pa)} Y^{(pc)} \mu_{np^b}^{(1+b)}$$

définie par

$$(5.33.2) \quad \phi(\mu) = \mu_0 \text{Fr}'(\mu) \mu_0 = \text{Fr}'(\mu) \mu_0; \mu \in \text{Dist}(G)$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{F}_p$ -algèbres tel que  $\text{Dist}(\text{Fr}) \circ \phi = \text{id}_{\text{Dist}(G)}$ .

Comme le lecteur s'en assurera, l'utilisation de la lettre  $\phi$  pour désigner (5.33.1) n'entraîne pas de confusion. Reprenons les notations de la preuve de 5.31 et supposons tout d'abord  $b = s = 0$ . On a

(5.33.3)

$$\begin{aligned}
&\phi(X^{(a)} Y^{(c)}) \phi(X^{(r)} Y^{(t)}) = X^{(ap)} Y^{(cp)} \mu_0 X^{(rp)} Y^{(tp)} \mu_0 \\
&= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i} \binom{a+r-i}{a} \binom{c+t-i}{t} X^{(p(a+r-i))} Y^{(p(c-i+t))} \mu_{p(j+2(c-i+t))}^{(l)}
\end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned}
(5.33.4) \quad & \phi(X^{(a)}Y^{(c)}X^{(r)}Y^{(t)}) \\
&= \phi\left(\sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i} \binom{a+r-i}{a} \binom{c+t-i}{t} X^{(a+r-i)} Y^{(c-i+t)} \mu_{j+2(c-i+t)}^{(l-1)}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i} \binom{a+r-i}{a} \binom{c+t-i}{t} X^{p(a+r-i)} Y^{p(c-i+t)} \mu_0 \text{Fr}'(\mu_{j+2(c-i+t)}^{(l-1)}) \\
&= \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-a-c+2i}{i} \binom{a+r-i}{a} \binom{c+t-i}{t} X^{p(a+r-i)} Y^{p(c-i+t)} \mu_{p(j+2(c-i+t))}^{(l)}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit bien que

$$(5.33.5) \quad \phi(X^{(a)}Y^{(c)})\phi(X^{(r)}Y^{(t)}) = \phi(X^{(a)}Y^{(c)}X^{(r)}Y^{(t)}).$$

Si maintenant  $b > 0$  et  $s = 0$ ,

$$\begin{aligned}
& \phi(X^{(a)}Y^{(c)}\mu_{np^{b-1}}^{(b)})\phi(X^{(r)}Y^{(t)}) = X^{(ap)}Y^{(cp)}\mu_{np^b}^{(1+b)}X^{(rp)}Y^{(tp)}\mu_0 \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i} \binom{a+r-i}{a} \binom{c+t-i}{t} X^{p(a+r-i)} Y^{p(c-i+t)} \mu_{p(j+2(c-i+t))}^{(l)} & \text{si } j+2(c-i+t) \equiv np^{b-1}-2r+2t \pmod{p^b} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned}
(5.33.6) \quad & \phi(X^{(a)}Y^{(c)}\mu_{np^{b-1}}^{(b)}X^{(r)}Y^{(t)}) \\
&= \phi\left(\sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i} \binom{a+r-i}{a} \binom{c+t-i}{t} X^{(a+r-i)} Y^{(c-i+t)} \mu_{j+2(c-i+t)}^{(l-1)} \mu_{np^{b-1}-2r+2t}^{(b)}\right) \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-r-c+2i}{i} \binom{a+r-i}{a} \binom{c+t-i}{t} X^{p(a+r-i)} Y^{p(c-i+t)} \mu_0 \text{Fr}'(\mu_{j+2(c-i+t)}^{(l-1)}) & \text{si } j+2(c-i+t) \equiv np^{b-1}-2r+2t \pmod{p^b} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{\min\{c,r\}} \sum_{j=0}^{p^{l-1}-1} \binom{j-a-c+2i}{i} \binom{a+r-i}{a} \binom{c+t-i}{t} X^{p(a+r-i)} Y^{p(c-i+t)} \mu_{p(j+2(c-i+t))}^{(l)} & \text{si } j+2(c-i+t) \equiv np^{b-1}-2r+2t \pmod{p^b} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}
\end{aligned}$$

et donc

$$(5.33.7) \quad \phi(X^{(a)}Y^{(c)}\mu_{np^{b-1}}^{(b)})\phi(X^{(r)}Y^{(t)}) = \phi(X^{(a)}Y^{(c)}\mu_{np^{b-1}}^{(b)}X^{(r)}Y^{(t)}).$$

On traite de la même façon les cas restants.

5.34. On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'un raffinement des arguments donnés ci-dessus permet de voir d'une part que pour tout  $r > 0$ , l'ensemble  $\sum_{a,b,c \in [0,p^r[} \sum_{n \in [0,p^b[} \mathbb{F}_p X^{(pa)} Y^{(pc)} \mu_{np^b}^{(1+b)}$  est une sous- $\mathbb{F}_p$ -algèbre de  $\mu_0 \text{Dist}(G_{r+1}) \mu_0$  et d'autre part que l'application  $\phi : \text{Dist}(G_r) \rightarrow \sum_{a,b,c \in [0,p^r[} \sum_{n \in [0,p^b[} \mathbb{F}_p X^{(pa)} Y^{(pc)} \mu_{np^b}^{(1+b)}$  analogue à (5.33.1) est un isomorphisme. Le lemme 5.31 et le théorème 5.33 se déduisent alors de ces résultats par passage à la limite inductive suivant  $r$ .

5.35. Pour tout nombre premier  $l = p$  impair, notons  $\hat{\mathcal{B}}$  le complété de  $\mathcal{B}$  relativement à l'idéal  $(q-1)$ . Tout  $\text{Dist}(G_1)$ -module indécomposable injectif/projectif est facteur direct d'un  $\text{Dist}(G_1) \mu_n$  avec  $n \in [0, p[$ . Si maintenant  $\mathfrak{u}_{\mathcal{B}}$  désigne la sous-algèbre de  $U_{\mathcal{B}}$  engendrée par  $E, F, K$  et si l'on pose  $\mathfrak{u}_{\hat{\mathcal{B}}} = \mathfrak{u}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{B}}$ , alors  $\mathfrak{u}_{\hat{\mathcal{B}}} \kappa'_{2n}$  est un relèvement de  $\text{Dist}(G_1) \mu_n$ . Il résulte de [2, 5.4] que les  $\text{Dist}(G_1) \mu_n$ -modules indécomposables injectifs/projectifs se relèvent en un facteur de  $\mathfrak{u}_{\hat{\mathcal{B}}} \kappa'_{2n}$  (cf. [2, 5.6]). En sens inverse, tout  $\mathfrak{u}_q \otimes_{\mathcal{B}} \text{Frac}(\hat{\mathcal{B}})$ -module intégrable indécomposable injectif/projectif est facteur direct d'un  $\mathfrak{u}_q \kappa'_n \otimes_{\mathcal{B}} \text{Frac}(\hat{\mathcal{B}})$ . Ces arguments s'étendent au cadre plus général dans lequel on va maintenant démontrer le théorème 1.5.

## 6. LE CAS GÉNÉRAL

6.1. Les notations et hypothèses générales de l'introduction 1.1 et 1.3 sont désormais en vigueur. On remarquera que celles sur  $l$  implique que les ordres des  $q_i^2 \in \mathcal{B}$  sont tous égaux à  $l$ . Rappelons que  $\begin{bmatrix} K_i \\ t \end{bmatrix} = \prod_{s=1}^t \frac{K_i v_i^{-s+1} - K_i^{-1} v_i^{s-1}}{v_i^s - v_i^{-s}} \in U_{\mathbb{Q}(v)}$ ,  $i \in [1, \ell]$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , appartient à  $U$ . Comme nous l'avons déjà sous-entendu plus haut (2.1.3), nous noterons  $\begin{bmatrix} K_i \\ t \end{bmatrix} \otimes 1 \in U \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$  par le même symbole  $\begin{bmatrix} K_i \\ t \end{bmatrix}$ .

6.2. Rappelons (5.14) que nous avons fait le choix  $q^{\frac{1}{2}} = -q^{\frac{1-l}{2}}$  et posons  $\kappa_{ij} = \frac{1}{2l} \sum_{r=0}^{2l-1} q^{\frac{-jr}{2}} K_i^r \in U_{\mathcal{B}}$ ,  $i \in [1, \ell]$ ,  $j \in [0, 2l[$ , et  $\kappa = \prod_{i=1}^{\ell} \kappa_{i0}$ . Lorsque  $\ell = 1$ , ces éléments correspondent donc à ceux considérés dans (5.11.1).

**Lemme 6.3.** (i) *L'élément  $\kappa$  est l'unique idempotent non nul de la sous-algèbre  $\mathfrak{u}_{\mathcal{B}}^0$  de  $U_{\mathcal{B}}$  engendrée par les  $K_i$ ,  $1 \leq i \leq \ell$ , tel que  $K_i \kappa = \kappa$  pour tout  $i \in [1, \ell]$ .*

(ii) *Pour tous  $i, j \in [1, \ell]$  et  $r \in \mathbb{Z}$ , on a*

$$(6.3.1) \quad E_i^{(lr)} \kappa_{j0} = \kappa_{j0} E_i^{(lr)} \quad \text{et} \quad F_i^{(lr)} \kappa_{j0} = \kappa_{j0} F_i^{(lr)}.$$

(iii) *Chaque  $\kappa_{ij}$ , avec  $i \in [1, \ell]$ ,  $j \in [1, 2l[$ , est un idempotent, et les  $\prod_{i=1}^{\ell} \kappa_{ij}$ ,  $j \in [0, 2l[$ , forment une décomposition de 1 en idempotents orthogonaux deux à deux.*

Les assertions (i) et (ii) découlent du lemme 3.2 car les  $K_i$ ,  $i \in [1, \ell]$  commutent entre eux.

L'assertion (iii) découle de la proposition 5.16

6.4. Soient  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^+ = \mathcal{B}[X_i^{(r)} \mid i \in I, r \in \mathbb{N}]$  et  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^- = \mathcal{B}[Y_i^{(r)} \mid i \in I, r \in \mathbb{N}]$  comme en 1.4. Rappelons que si  $H_i = [X_i, Y_i]$ , chaque  $\binom{H_i}{r} = \frac{H_i(H_i-1)\dots(H_i-r+1)}{r!} \in \mathbf{U}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ,  $i \in I$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , appartient en fait à  $\mathbf{U}_{\mathcal{A}}$  et que, si  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^0 = \mathcal{B}[\binom{H_i}{r} \mid i \in I, r \in \mathbb{N}]$ , on dispose d'un isomorphisme  $\mathcal{B}$ -linéaire  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^- \otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^0 \otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^+ \rightarrow \mathbf{U}_{\mathcal{B}}$  donné par la multiplication. Soit  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geq 0}$  (resp.  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$ ) l'image par cette application de  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^0 \otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^+$  (resp.  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^- \otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^0$ ), qui est une sous- $\mathcal{B}$ -algèbre de  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$ .

**Lemme 6.5.** *Il existe des applications multiplicatives  $\mathcal{B}$ -linéaires  $\phi^{\geq 0} : \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geq 0} \rightarrow \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geq 0}$  et  $\phi^{\leq 0} : \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leq 0} \rightarrow \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$  telles que pour tous  $i \in I$  et  $r \in \mathbb{N}$ ,*

$$(6.5.1) \quad \phi^{\geq 0}(X_i^{(r)}) = E_i^{(rl)} \kappa, \quad \phi^{\geq 0}\left(\binom{H_i}{r}\right) = \begin{bmatrix} K_i \\ rl \end{bmatrix} \kappa = \phi^{\leq 0}\left(\binom{H_i}{r}\right), \quad \phi^{\leq 0}(Y_i^{(r)}) = F_i^{(rl)} \kappa.$$

En effet, il existe d'après [8, Th.1.2] des homomorphismes de  $\mathcal{B}$ -algèbres  $'\phi^{\geq 0} : \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\geq 0} \rightarrow U_{\mathcal{B}}^{\geq 0}$  et  $'\phi^{\leq 0} : \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^{\leq 0} \rightarrow U_{\mathcal{B}}^{\leq 0}$  modulo  $(K_i^l - 1 \mid i \in I)$  tels que pour tous  $i \in I$ , et  $r \in \mathbb{N}$ , on ait

$$(6.5.2) \quad '\phi^{\geq 0}(X_i^{(r)}) = E_i^{(r)}, \quad '\phi^{\geq 0}\left(\begin{pmatrix} H_i \\ r \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} K_i \\ r \end{bmatrix} = '\phi^{\leq 0}\left(\begin{pmatrix} H_i \\ r \end{pmatrix}\right), \quad '\phi^{\leq 0}(Y_i^{(r)}) = F_i^{(r)}.$$

Comme  $K_i^l$  est un élément central ([10, Lem.4.4]) dans  $U_{\mathcal{B}}$  et comme  $\kappa_{i0}(K_i^l - 1) = 0$  pour tout  $i$  grâce à 6.3 (iii), l'assertion en découle.

6.6. Avec ces notations, le même argument que celui utilisé dans [5, Th.1.4] prouve la

**Proposition 6.7.** *Il existe une application  $\mathcal{B}$ -linéaire multiplicative  $\phi : \mathbf{U}_{\mathcal{B}} \rightarrow U_{\mathcal{B}}$  prolongeant  $\phi^{\geq 0}$  et  $\phi^{\leq 0}$ , qui, de plus, scinde le morphisme de Frobenius quantique (1.3.1)  $\text{Fr} : U_{\mathcal{B}} \rightarrow U_{\mathcal{B}}$ .*

et le théorème (1.5).

6.8. L'application de Frobenius quantique (1.3.1)  $\text{Fr}$  est en réalité un homomorphisme de  $\mathcal{B}$ -algèbres de Hopf [11, 1.1, 1.3] vérifiant quelques compatibilités supplémentaires. La comultiplication sur  $U$  vérifie

$$(6.8.1) \quad \Delta(E_i^{(n)}) = \sum_{j=0}^n v_i^{j(n-j)} E_i^{(n-j)} K_i^j \otimes E_i^{(j)}, \quad \Delta(F_i^{(n)}) = \sum_{j=0}^n v_i^{-j(n-j)} F_i^{(j)} \otimes K_i^{-j} F_i^{(n-j)}, \quad \Delta(K_i) = K_i$$

pour tous  $i \in [1, \ell]$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On a donc  $(\text{Fr} \otimes \text{Fr}) \circ \Delta(E_i^{(n)}) = \sum_{j=0}^n X_i^{(\frac{n-j}{l})} \otimes X_i^{(\frac{j}{l})}$ , quantité qui s'annule sauf si  $l \mid n$ , auquel cas

$$(6.8.2) \quad (\text{Fr} \otimes \text{Fr}) \circ \Delta(E_i^{(nl)}) = \sum_{j=0}^n X_i^{(n-j)} \otimes X_i^{(j)} = \Delta \circ \text{Fr}(E_i^{(nl)})$$

pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $i \in [1, \ell]$ . De même  $(\text{Fr} \otimes \text{Fr}) \circ \Delta(F_i^{(n)}) = \Delta \circ \text{Fr}(F_i^{(n)})$ . On a également  $(\text{Fr} \otimes \text{Fr}) \circ \Delta(K_i) = (\text{Fr} \otimes \text{Fr})(K_i \otimes K_i) = 1 \otimes 1 = \Delta \circ \text{Fr}(K_i)$ .

Comme  $U = \mathcal{A}[E_i^{(n)}, F_i^{(n)}, K_i^{\pm 1} \mid i \in [1, \ell], n \in \mathbb{N}]$ , on en déduit donc que

$$(6.8.3) \quad (\text{Fr} \otimes \text{Fr}) \circ \Delta = \Delta \circ \text{Fr}.$$

La coïunité  $\varepsilon$  sur  $U$  annule tous les  $E_i^{(n)}$  et  $F_i^{(n)}$ ,  $n > 0$ , et envoie  $K_i$  to 1. On a donc

$$(6.8.4) \quad \text{Fr} \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \text{Fr}.$$

Finalement, l'antipode  $S$  sur  $U$  est donnée par  $S(E_i^{(n)}) = (-1)v_i^{n(n-1)} K_i^{-n} E_i^{(n)}$ ,  $S(F_i^{(n)}) = (-1)v_i^{-n(n-1)} F_i^{(n)} K_i^n$ , et  $S(K_i) = K_i^{-1}$ . On a donc

$$(6.8.5) \quad (\text{Fr} \otimes \text{Fr}) \circ S = \Delta \circ S.$$

Pour le scindage  $\phi$  (1.5.1) la situation est toute autre. On a  $\varepsilon \circ \phi = \phi \circ \varepsilon$ , et  $S(\kappa) = \kappa$  car  $K_i^{2l} = 1$ . Comme  $K_i \kappa = \kappa$  pour tout  $i \in [1, \ell]$  grâce à 6.3 (i), on a donc aussi

$$(6.8.6) \quad S \circ \phi = \phi \circ S.$$

L'application  $\phi$  ne commute néanmoins pas avec les comultiplications :  $(\phi \otimes \phi) \circ \Delta(1) = \kappa \otimes \kappa \neq \Delta(\kappa) = \Delta \circ \phi(1)$ . Cependant,

(6.8.7)

$$\begin{aligned} \Delta(\kappa)(\kappa \otimes \kappa) &= (\kappa \otimes \kappa) \prod_{i=1}^{\ell} \left\{ \frac{1}{2\ell} \sum_{j=0}^{2\ell-1} K_i^j \otimes K_i^j \right\} \quad \text{en calculant après extension des scalaires à } \mathbb{Q}[q] \\ &= \kappa \otimes \kappa \quad \text{car } \kappa \text{ est une mesure invariante.} \end{aligned}$$

Rappelons aussi [11, 1.1], [13, 3.1.3] qu'il existe une involution  $\Omega$  et une anti-involution  $\Psi$  de  $U$  définies par

$$(6.8.8) \quad \Omega(E_i) = F_i, \quad \Omega(F_i) = E_i, \quad \Omega(K_i) = K_i^{-1}, \quad \Omega(v) = v$$

$$(6.8.9) \quad \Psi(E_i) = E_i, \quad \Psi(F_i) = F_i, \quad \Psi(K_i) = K_i^{-1}, \quad \Psi(v) = v$$

telles que le anti-morphisme  $\Psi \circ \Omega = \Omega \circ \Psi$  échange  $E_i^{(n)}$  et  $F_i^{(n)}$  et fixe  $K_i$  pour tout  $i \in [1, \ell]$ . Abrégeant  $(\Omega \circ \Psi) \otimes_{\mathcal{A}} \text{Id}_{\mathcal{B}}$  en  $\Omega \circ \Psi$ , on a

$$(6.8.10) \quad \Omega \circ \Psi(\kappa) = \kappa.$$

Si maintenant  $\tau$  désigne l'anti-involution de Chevalley de  $\mathbf{U}_{\mathbb{Q}}$  échangeant chaque  $E_i$  avec  $F_i$ , on a

$$(6.8.11) \quad \Omega \circ \Psi \circ \phi = \phi \circ \tau.$$

6.9. La  $\mathcal{A}$ -forme de l'algèbre quantique modifiée sur  $\mathbb{Q}(v)$  est  $\dot{U} = \coprod_{\lambda \in \Lambda} U^+ 1_{\lambda} U^- = \coprod_{\lambda \in \Lambda} U^- 1_{\lambda} U^+$  avec la structure de  $U$ -bimodule donnée dans [13, 23.1.3]. On a en particulier  $K_i 1_{\lambda} = v_i^{\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle} 1_{\lambda}$  pour tous  $i \in [1, \ell]$  et  $\lambda \in \Lambda$ . Si  $\dot{U}_{\mathcal{B}} = \dot{U} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ , l'application  $\mathcal{B}$ -linéaire multiplicative  $\psi : U_{\mathcal{B}} \rightarrow \dot{U}_{\mathcal{B}}$  définie par  $x \mapsto x 1_0$ ,  $x \in U_{\mathcal{B}}$ , envoie  $\kappa$  sur  $1_0$ . Soit  $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}/(q-1)$ . Si

$$(6.9.1) \quad \eta : U \otimes_{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbf{U}_{\mathcal{B}}$$

désigne la surjection canonique  $U \otimes_{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{B}} \rightarrow (U \otimes_{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{B}})/(K_i - 1 \mid i \in [1, \ell]) \simeq \mathbf{U} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathcal{B}}$  composée avec l'injection évidente  $\mathbf{U} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathcal{B}} \hookrightarrow \mathbf{U}_{\mathcal{B}}$  et si  $\text{Fr}' : \dot{U} \otimes_{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{B}} \rightarrow \dot{U}_{\mathcal{B}}$  est le scindage considéré par McGerty [15], il résulte immédiatement des définitions qu'on a un diagramme commutatif

$$(6.9.2) \quad \begin{array}{ccc} \dot{U} \otimes_{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\text{Fr}'} & \dot{U}_{\mathcal{B}} \\ \bar{\psi} \uparrow & & \uparrow \psi \\ U \otimes_{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\eta} \mathbf{U}_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\phi} & U_{\mathcal{B}}. \end{array}$$

## 7. CONTRACTION

7.1. Comme dans le cas modulaire [5] on peut contracter tout  $U_{\mathcal{B}}$ -module en utilisant le scindage  $\phi$ . Comme  $\kappa$  est un idempotent, tout  $U_{\mathcal{B}}$ -module  $M$  admet une décomposition  $M = \kappa M \oplus (1 - \kappa)M$ . De plus,  $\kappa$  est l'unité de l'image de  $\phi$ , on peut donc définir une structure de  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$ -module sur le  $\kappa$ -"bloc"  $\kappa M$  en faisant agir  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}$  via  $\phi$ , annulant ainsi  $(1 - \kappa)M$ . On appellera cette nouvelle structure sur  $\kappa M$  par  $M^{\phi}$ , on l'appellera la *contraction par Frobenius* de  $M$  et l'on écrira  $x \bullet m = \phi(x)m$  pour tous  $x \in \mathbf{U}_{\mathcal{B}}$  et  $m \in \kappa M$ .



7.2. Soit  $\Lambda$  comme ci-dessus le réseau des poids de  $A$ . Pour tout  $\lambda \in \Lambda$  on définit un homomorphisme de  $\mathcal{A}$ -algèbres  $\chi_\lambda : U^0 \rightarrow \mathcal{A}$  par  $K_i \mapsto v_i^{\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle}$  et  $\begin{bmatrix} K_i \\ r \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \\ r \end{bmatrix}_i = \prod_{s=1}^{\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle} \frac{v_i^{r-s+1} - v_i^{-r+s-1}}{v_i^s - v_i^{-s}}$  pour tout  $i$  et  $r \in \mathbb{N} [1, 1.1]$ . On notera encore simplement  $\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{A}} \text{Id}_{\mathcal{B}}$  par  $\chi_\lambda : U_{\mathcal{B}}^0 \rightarrow \mathcal{B}$ .

Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on définit de même un homomorphisme de  $\mathcal{B}$ -algèbres  $\bar{\chi}_\lambda : \mathbf{U}_{\mathcal{B}}^0 \rightarrow \mathcal{B}$  tel que  $\begin{pmatrix} H_i \\ n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \\ n \end{pmatrix}$  pour tous  $i$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Le lecteur remarquera que cette notation est compatible, en un sens évident, avec celle de (5.9.6). On a

$$(7.2.1) \quad \bar{\chi}_\lambda \circ \text{Fr}|_{U_{\mathcal{B}}^0} = \chi_{l\lambda}.$$

7.3. Soient  $\{\alpha_i \mid i \in [1, \ell]\}$  l'ensemble des racines simples correspondant aux  $E_i$ , et  $\alpha_i^\vee$  les coracines correspondantes. Soit  $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in [0, l[ \text{ pour tout } i\}$ . Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , nous écrirons  $\lambda = \lambda^0 + l\lambda^1$  avec  $\lambda^0 \in \Lambda_1$  et  $\lambda^1 \in \Lambda$ .

Notons  $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$  la catégorie des  $U_{\mathcal{B}}$ -modules intégrables de type **1** [1, 1.6]. On dira qu'un objet  $M$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$  se décompose suivant ses poids si  $M = \coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  avec  $M_\lambda = \{m \in M \mid xm = \chi_\lambda(x)m \text{ pour tout } x \in U_{\mathcal{B}}^0\}$ .

**Proposition 7.4.** *Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on a*

$$(7.4.1) \quad \chi_\lambda \circ \phi|_{\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^0} = \begin{cases} \bar{\chi}_{\lambda^1} & \text{si } \lambda \in l\Lambda, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, pour tout  $M \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$  se décomposant suivant ses poids, on a

$$(7.4.2) \quad M^\phi = \coprod_{\lambda \in \Lambda} M_{l\lambda},$$

avec  $\mathbf{U}_{\mathcal{B}}^0$  agissant sur  $M_{l\lambda}$  par  $\bar{\chi}_\lambda$ .

En effet, on a

$$(7.4.3) \quad \begin{aligned} \chi_\lambda(\kappa) &= \chi_\lambda\left(\prod_{i=1}^{\ell} \kappa_{i0}\right) = \prod_{i=1}^{\ell} \chi_\lambda(\kappa_{i0}) = \prod_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \overline{\begin{bmatrix} \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \\ j \end{bmatrix}_{q_i}}\right) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } l|\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \text{ pour tout } i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$(7.4.4) \quad \chi_\lambda \circ \phi \begin{pmatrix} H_i \\ m \end{pmatrix} = \chi_\lambda \left( \begin{bmatrix} K_i \\ ml \end{bmatrix} \right) \chi_\lambda(\kappa) = \begin{cases} \binom{\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle}{ml} = \binom{l\langle \lambda^1, \alpha_i^\vee \rangle}{ml} = \binom{\langle \lambda^1, \alpha_i^\vee \rangle}{m} & \text{si } \lambda \in l\Lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme  $\bar{\chi}_{\lambda^1} \begin{pmatrix} H_i \\ m \end{pmatrix} = \binom{\langle \lambda^1, \alpha_i^\vee \rangle}{m}$ , la proposition s'ensuit.

7.5. Posons  $\mathbf{U}_q = \mathbf{U}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \mathbb{Q}(q)$ . Pour un  $U_q$ -module de dimension finie  $M$  désignons par  $M^{\Omega\Psi}$  son  $\mathbb{Q}(q)$ -dual  $M^*$  équipé de la structure de  $U_q$ -module définie par  $xf = f((\Omega \circ \Psi)(x))$ , pour  $x \in U_q$  et  $f \in M^*$ .

**Proposition 7.6.** *Pour tout  $U_q$ -module de dimension finie  $M$ , il existe un isomorphisme de  $\mathbf{U}_q$ -modules*

$$(7.6.1) \quad (M^\phi)^\tau \simeq (M^{\Omega\Psi})^\phi.$$

Considérons l'application de restriction  $M^{\Omega\Psi} \rightarrow (\kappa M)^*$ , qui est  $\mathbb{Q}[q]$ -linéaire et surjective. Comme  $\Omega \circ \Psi(\kappa) = \kappa$ , on a  $\kappa f = f(\kappa ?)$  pour tout  $f \in M^{\Omega\Psi}$ . Comme  $\kappa$  annule  $(1 - \kappa)M$ , l'application de restriction induit la bijection voulue  $(M^{\Omega\Psi})^\phi \simeq (M^\phi)^\tau$  grâce à (5.8.2).

7.7. Si  $M$  est un  $\mathbf{U}_\mathcal{B}$ -module, on notera  $M^{\text{Fr}}$  le  $U_\mathcal{B}$ -module dont l'espace sous-jacent est celui de  $M$  et la structure de  $U_\mathcal{B}$ -module est celle donnée composée avec  $\text{Fr} : U_\mathcal{B} \rightarrow \mathbf{U}_\mathcal{B}$ . On a donc  $(M^{\text{Fr}})^\phi = M$ .

**Lemme 7.8.** *Soit  $V$  un  $U_\mathcal{B}$ -module intégrable de type 1 et  $M$  un  $\mathbf{U}_\mathcal{B}$ -module de type fini sur  $\mathcal{B}$  admettant une décomposition suivant ses poids. On a des isomorphismes de  $\mathbf{U}_\mathcal{B}$ -modules*

$$(7.8.1) \quad (V \otimes M^{\text{Fr}})^\phi \simeq V^\phi \otimes M \simeq (M^{\text{Fr}} \otimes V)^\phi.$$

Soient  $z \in V$  et  $m \in M^{\text{Fr}}$ . Pour tous  $i \in [1, \ell]$  et  $r \in \mathbb{N}$ , on a, dans  $(V \otimes M^{\text{Fr}})^\phi$ ,

$$(7.8.2) \quad \begin{aligned} X_i^{(r)} \bullet (\kappa z \otimes m) &= \phi(X_i^{(r)})(\kappa z \otimes m) = \phi(X_i^{(r)})(\kappa z \otimes \kappa m) \quad \text{car } \kappa m = m \\ &= \Delta(E_i^{(rl)})\Delta(\kappa)(\kappa z \otimes \kappa m) \\ &= \Delta(E_i^{(rl)})(\kappa z \otimes \kappa m) \quad \text{par (6.8.7)} \\ &= \sum_{j=0}^{rl} (q_i^{j(rl-j)} E_i^{(rl-j)} \otimes E_i^{(j)})(\kappa z \otimes m) \quad \text{avec } q_i = q^{d_i} \\ &= \sum_{j=0}^r (E_i^{((r-j)l)} \kappa z) \otimes (X_i^{(j)} m) \quad \text{car } m \in M^{\text{Fr}} \end{aligned}$$

alors que, regardant  $\kappa z \otimes m$  dans  $V^\phi \otimes M$ , on a

$$(7.8.3) \quad \begin{aligned} X_i^{(r)} \bullet (\kappa z \otimes m) &= \Delta(X_i^{(r)})(\kappa z \otimes m) = \sum_{j=0}^r (X_i^{(r-j)} \otimes X_i^{(j)})(\kappa z \otimes m) \\ &= \sum_{j=0}^r (X_i^{((r-j)l)} \kappa z) \otimes (X_i^{(j)} m). \end{aligned}$$

De même pour l'action de  $Y_i^{(r)}$ , si bien que le premier isomorphisme de (7.8.1) s'ensuit. Le second isomorphisme se traite de manière analogue.

7.9. Revenons à la situation modulaire 5.6 et rappelons qu'alors que tous les  $\mathbf{U}_\mathbb{Q}$ -modules de dimension finie sont semi-simples [7, Th. II.8], tel n'est pas le cas pour les  $G$ -modules.

Soient  $\Lambda^+$  l'ensemble des poids dominants,  $\nabla(\lambda)$  le  $G$ -module induit standard construit à partir de  $\lambda \in \Lambda^+$  (ceux-ci sont définis sur  $\mathbb{Z}$  et fournissent les  $\mathbf{U}_\mathbb{Q}$ -modules simples par changement de base) et  $L(\nu)$  le  $G$ -module simple de plus haut poids  $\nu \in \Lambda^+$ . Soit  $\Lambda_1$  comme dans 7.3 mais avec  $l$  remplacé par  $p$ .

On dit qu'un  $G$ -module  $M$  de dimension finie admet une *bonne filtration* (resp. une *bonne  $p$ -filtration*) si et seulement s'il admet une filtration par des  $G$ -sous-modules dont les gradués associés sont de la forme  $\nabla(\lambda)$  avec  $\lambda \in \Lambda^+$  (resp.  $L(\nu) \otimes \nabla(\mu)^{\text{Fr}}$  avec  $\nu \in \Lambda_1$ ,  $\mu \in \Lambda^+$ ).

Soit  $h$  le nombre de Coxeter de  $G$ .

**Proposition 7.10.** *Supposons  $p \geq 2(h-1)$  et soit  $M$  un  $G$ -module  $M$  de dimension finie. Toute bonne  $p$ -filtration sur  $M$  induit une bonne filtration sur  $M^\phi$ .*

Comme le foncteur  $V \rightarrow V^\phi$  est exact, on peut supposer que  $M = L(\nu) \otimes \nabla(\lambda)^{\text{Fr}}$  pour certains  $\nu \in \Lambda_1$  et  $\lambda \in \Lambda^+$ . On a alors  $(L(\nu) \otimes \nabla(\lambda)^{\text{Fr}})^\phi \simeq L(\nu)^\phi \otimes \nabla(\lambda)$  grâce au lemme 7.8. Si  $L(\nu)^\phi$  admet une bonne filtration avec des sous-quotients  $\nabla(\eta)$ , alors  $L(\nu)^\phi \otimes \nabla(\lambda)$  admettra une filtration avec des sous-quotients  $\nabla(\eta) \otimes \nabla(\lambda)$ , lesquels admettent une bonne filtration grâce à [14, Thm 1.-1].

Encore grâce au lemme 7.8, on peut même supposer  $M = L(\nu)$  pour un certain  $\nu \in \Lambda_1$ . Néanmoins, si  $p\eta$  est un poids de  $L(\nu)$ , et si  $\alpha_0^\vee$  est la plus haute coracine de  $G$  et  $\rho$  la demi-somme des racines positives, on a  $p\langle \eta + \rho, \alpha_0^\vee \rangle = \langle p\eta, \alpha_0^\vee \rangle + p(h-1) \leq \langle \nu, \alpha_0^\vee \rangle + p(h-1) \leq \langle (p-1)\rho, \alpha_0^\vee \rangle = (2p-1)(h-1)$ , et donc  $\langle \eta + \rho, \alpha_0^\vee \rangle \leq (h-1)(2 - \frac{1}{p}) < 2(h-1) \leq p$ . Il découle alors du linkage principe fort que  $L(\nu)^\phi$  est une somme directe de  $\nabla(\eta)$  avec des  $\eta \in \Lambda^+$ .

7.11. Supposant établie la conjecture de Lusztig concernant les caractères irréductibles de  $G$ , laquelle est un théorème pour  $p$  suffisamment grand, Parshall et Scott [16, Th. 5.1] montrent que pour  $p \geq 2(h-1)$  tout  $\nabla(\lambda)$  avec  $\lambda \in \Lambda^+$ , admet une bonne  $p$ -filtration. On déduit donc de la proposition 7.10 le

**Corollaire 7.12.** *Supposons établie la conjecture de Lusztig et  $p \geq 2(h-1)$ . Soit  $M$  un  $G$ -module  $M$  de dimension finie. Toute bonne filtration sur  $M$  en induit une sur  $M^\phi$ .*

## RÉFÉRENCES

- [1] ANDERSEN, H.H. ; POLO, P. ; WEN K., *Representations of quantum algebras*, Inv. Math. **104** (1991), 1-53.
- [2] ANDERSEN, H.H. ; POLO, P. ; WEN K., *Injective modules for quantum algebras*, Amer. J. Math. **114** (1992), 571-604.
- [3] ANDERSEN, H.H. ; WEN K., *Representations of quantum algebras The mixed case*, J. reine angew. Math. **427** (1992), 35-50.
- [4] GROS, M., *A Splitting of the Frobenius Morphism on the Whole Algebra of Distributions of  $SL_2$* , Algebr. Represent. Theory **15**, 1, (2012), 109-118.
- [5] GROS, M ; KANEDA, M., *Contraction par Frobenius de  $G$ -modules*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **61**, 6 (2011), 2507-2542.
- [6] HUMPHREYS, J.E. , *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, GTM 9, Springer-Verlag (1972).
- [7] JACOBSON, N., *Lie Algebras*, Wiley Interscience, (1962).
- [8] KUMAR, S. ; LITTELMANN, P., *Algebraization of Frobenius splitting via quantum groups*, Ann. of Math. (2) **155**, 2, (2002), 491-551.
- [9] LITTELMANN, P., *Contracting modules and standard monomial theory for symmetrizable Kac-Moody algebras*, JAMS **11** (1998), 551-567
- [10] LUSZTIG, G., *Modular representations and quantum groups*, 59-77 in Contemp. Math. **82**, Providence 1989 (AMS).
- [11] LUSZTIG, G., *Quantum groups at roots of 1*, Geom. Dedicata . **35**, 1-3, (1990), 89-113.
- [12] LUSZTIG, G., *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. . **3**, 1, (1990), 257-296.
- [13] LUSZTIG, G., *Introduction to Quantum Groups*, PM **110** (1993)
- [14] MATHIEU, O., *Filtrations of  $G$ -modules*, Ann. Sci. ENS **23** (1990), 625-644.
- [15] MCGERTY, K., *Generalized  $q$ -Schur algebras and quantum Frobenius*, Adv. Math. **214** (2007), 116-131.
- [16] PARSHALL, B. ; SCOTT, L., *On  $p$ -filtrations of Weyl modules*, arXiv :1208.3221v3.

M.G. CNRS UMR 6625, IRMAR, UNIVERSITÉ DE RENNES 1, CAMPUS DE BEAULIEU, 35042 RENNES CEDEX, FRANCE

M.K. OSAKA CITY UNIVERSITY, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, 3-3-138 SUGIMOTO, SUMIYOSHI-KU, OSAKA 558-8585, JAPAN

*E-mail address:* michel.gros@univ-rennes1.fr

*E-mail address:* kaneda@sci.osaka-cu.ac.jp